APORTES MATEMÁTICOS DE LA CULTURA CHINA COMO UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN EL AULA

JENNIFER ANDREA POSADA GARCIA

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA

APORTES MATEMÁTICOS DE LA CULTURA CHINA COMO UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN EL AULA

Trabajo de grado

Director JULIAN GUZMAN BAENA

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA

2017

Nota de aceptación

Firma de jurado

Firma de jurado

Pereira, 2017

Agradecimientos:

Agradezco a Dios por brindarme la oportunidad de continuar mi formación profesional y a mi director Julián Guzmán Baena por su acompañamiento para el desarrollo de este trabajo

Dedicatoria:

Dedico este trabajo a mi familia y mis amigos ya que fueron de gran motivación para continuar con mi crecimiento personal y académico

Índice general

Introducción

En este proyecto se articuló la historia de la matemática de la Cultura China con el proceso de enseñanza de las matemáticas, mediante proyectos de aula que permitieron transversalizar componentes como son la historia, la geografía, la pedagogía, la teoría de números, entre otros.

Los proyectos componentes de este trabajo se aplicaron en la Universidad Tecnológica de Pereira a 27 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Física, en las asignaturas Historia y epistemología de las matemáticas (13 estudiantes), Matemáticas recreativas (6 estudiantes) y Enseñanza de las matemáticas (8 estudiantes) durante el primer semestre del 2017 orientados por el profesor Julián Guzmán Baena; y con docentes de matemáticas que actualmente laboran en colegios. Esto se hizo con el fin de generar opciones de llegar al aula de una forma innovadora y dinámica logrando así que los estudiantes se incentiven a trabajar en esta fascinante área de las matemáticas. Además se lograron grandes aportes y observaciones por parte de los docentes y estudiantes en busca del mejoramiento del empalme de la historia de las matemáticas con otros aspectos.

Capítulo 0: Marco Teórico y Objetivos

A. Referentes teóricos. Como primer referente se tiene la literatura donde se trabaja una historia de la cultura China que recopila todos los diferentes periodos, desarrollos, trabajos realizados en la misma, titulado “Las Matemáticas Chinas” (2004) realizado por Algarra, Borges, García y Hernández donde además describen paso a paso como fue evolucionando la historia de dicha cultura, sus actividades más predominantes, diálogos de matemáticos y el razón de ser de la aparición.

Un gran referente que se tiene es el documento de Carrillo (2001) titulado “El Proyecto Pedagógico de Aula” donde describe de una forma muy explícita cuales son las características del mismo, para que sirve (sus beneficios), que es, como se elabora y otras preguntas más que surgen a la hora de realizar un PPA, lo cual sirvió para la construcción y direccionamiento de los proyectos de aula que se muestran en el presente documento (del capítulo 2 al capítulo 8), articulando la historia de la matemática con una estrategia didáctica de la enseñanza de las matemáticas.

> **Definición:** La pedagogía por Proyectos: es una de las estrategias para la formación de personas que apuntan a la eficiencia y eficacia de los aprendizajes y a la vivencia de valores democráticos, a través de un trabajo cooperativo, de co-elaboración del plan, de co-realización, de co-teorización que debe involucrar a todos los actores: maestros-alumnos (Josette Jolibert, 1994).

Asimismo, el escrito de Puig (2006) titulado, La resolución de problemas en la historia de las matemáticas, favorecerán la parte de cómo trabajar la matemáticas con referentes históricos; éste documento desarrolla paso a paso los procesos de la historia para la resolución de un problema brindando comparaciones claras de cómo se soluciona hoy en día dichos problemas y como ocurrió en el pasado, con diferentes matemáticos destacados del mundo. Además da a conocer observaciones particulares de la historia en la resolución aritmético-algebraica de problemas destacados del antiguo Egipto, de la época helenística, de la época paleobabilónica, de Descartes y del siglo IX en el islam medieval, es decir, diferentes entornos para manejar un amplio panorama.

El documento Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) es una fuente destacada para ésta investigación dado que servirá de guía para analizar las competencias que deberá desarrollar el estudiante en este pensamiento. El documento cuenta con las respuestas de muchas preguntas relacionadas con los estándares como lo son ¿Por qué? ¿Para qué? ¿Cómo desarrollarlo? Además cuenta con herramientas bibliográficas de apoyo que serán útiles para fomentar el desarrollo de dicho pensamiento. Cabe destacar que los pensamientos desarrollados, en su mayoría, fueron el pensamiento espacial y sistemas geométricos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, tenidos en cuenta para el desarrollo de los proyectos de aula y para el alcance de los objetivos trazados en cada guía.

Por otro lado, esta investigación también se centra en mejorar la actitud del estudiante visto que actualmente se conoce el desagrado que se tiene hacia la matemática en general, el documento titulado "Discusión pedagógica, actitudes hacia la matemática" realizado por Martínez Padrón (2007) se discute sobre esta problemática desde un enfoque teórico-práctico comparando las actitudes versus la incidencia del proceso de enseñanza, igualmente se presenta la importancia de la actitud dado que esto implica un conocimiento subjetivo dependiendo también del ambiente donde se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje y se nombran algunas concepciones actuales que podrían ser un ente referente para el desarrollo de este proyecto ya que a partir de estas conclusiones es más fácil la búsqueda de cómo cautivar al estudiante con las secuencias a implementar en el aula, conociendo las dificultades es más factible combatirlas.

Un gran insumo e inspiración para el desarrollo de este trabajo de grado fueron las lecciones del curso Historia de las Matemáticas de la Maestría Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira dirigido por el docente Julián Guzmán creador de las mismas.

Los documentos nombrados anteriormente, aportan, soportan y ayudan de una forma significativamente, clara e idónea a la implementación del trabajo de grado a presentar por diferentes razones, debido que cada uno se relaciona de cierto modo con la investigación "Aportes Matemáticos de la Cultura China como una estrategia didáctica en el aula" ya sea en la parte histórica, en los proyectos de aula, en los temas a fin o en la actitud de los estudiantes hacia la educación matemática, brindando importantes conclusiones que servirán como base a la hora de cumplir cada uno de los objetivos propuestos.

B. Objetivo General:

Utilizar la historia de la cultura China como estrategia didáctica para la implementación de proyectos de aula con el fin de generar una actitud positiva en los estudiantes.

C. Objetivos Específicos:

1. Conocer aportes matemáticos fundamentales de la cultura China para que los estudiantes tengan una actitud positiva.
2. Realizar proyectos de aula acordes con el fin de establecer la eficacia de los estudiantes en el nivel cognitivo de los estudiantes.
3. Generar una actitud positiva en los estudiantes mediante la utilización de proyectos de aula para el fortalecimiento del proceso de aprendizaje matemático.

Capítulo 1: Síntesis de la Matemática China

1.1. Diez y seis famosos matemáticos chinos entre los siglos III y XIII d.C

Siglo III d.C: Reino WEI (184 – 283)

Nombres	**Dinastía o reino**	**Resultados o/y obras**
Shen Luan	Reino Wei	• **“Cinco clásicos de aritmética”** (Wǔjing suànshù) • **“Memorias de algunas tradiciones aritméticas”** (Suànshù chuántǒng de jìyì) [1] • **“Manual aritmetico de las cinco secciones del gobierno”** (Zhèngfǔ wǔ yuàn de suànshù shǒucè **)**
Liu Hui **(225 – 295 d.C)**	Reino Wei	Comentó el iuzhang Suanshu o **“Los nueve capítulos del arte de contar”** J . En sus comentarios: • Da lugar a la notación en base decimal junto con la introducción del punto decimal; • Estima al número PI, π, en 3, 14159; • ***Analiza sistemas de ecuaciones lineales simultáneas, mediante el método de eliminación de Gauss*** • Da aplicaciones del th Gougu (“Pitágoras”)
		“Manual matemático de una isla en el mar” (Haidao suanjing)
Zhao Huang	Reino Wei	*Bella y didáctica demostración del th Gougu (Pitágoras)*

Siglo V d.C: Dinastías Norte y Sur (420 – 589)

Sun Zi **(400-460 d.C)**	Un período de división y guerra	**El clásico matemático de Sun Zi** (Sun Zi Suanjing)**:** Numeración con varillas, operaciones con números y fraccionarios, raíz cuadrada y el ejemplo más antiguo del famoso teorema chino del residuo.
Xia Hou Yang (400 – 470 d.C)	Un período de división y guerra	**El clásico matemático de Xia Hou** (Xia Hou Suanjing)
Zu Chongzhi (429 – 500) e hijo Zu Geng.	Dinastias Norte y Sur	• Haciendo uso del th Gougu hallan la ***fórmula del volumen de una esfera***: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; • Aproximan al número π: $3,1415926 < \pi < 3,1415927$
Zhang Qiujian **(430 – 490 d.C)**	Dinastias Norte y Sur	**El clásico matemático de Zhang Qiujian** **(**Zhang Qiujian Suanjing)

[1] En esa obra aparece por primera vez un serio tratamiento de los ***cuadrados mágicos***, tratados con gran profundidad en el siglo XIII por el matemático Yang Hui.

Siglo VI – VII d.C: Dinastías Sui (581 – 618) y Tang (618 – 907)

Nombres	**Dinastía**	**Resultados o/y obras**
Liu Zhuo (544-610)	Sui	Astrónomo que introdujo ***la interpolación cuadrática*** con un método de diferencia de segundo orden[2] . Además hace comentarios del **Jiuzhang Suanshu.**
Wáng Xiantong **(580 – 640)**	Tang	• **Trabaja algebraicamente polinomios de grado 3** • Algoritmo para extraer **raíces cubicas** de un número. **Continuación de las matemáticas antiguas (Gǔdài shùxué de yánxù)**
Li Chunfeng **(602 – 670).**	Tang	Junto con ***Liang Shu*** y ***Wang Zhenru*** escribieron y recopilaron **"Los diez manuales matemáticos"** [3]

Siglos XI – XIII d.C: Dinastías Song_Yuan (960 -1368). **Álgebra Suprema China**

Shen Quo **(1031 – 1095)**	Song	"El científico más grande del Asia". Calcula series finitas de orden 2: $\sum_1^n (a + bk)^2$
Jia Xian (siglo XII)	Song	**500 años antes que Pascal** descubre su famoso triángulo para resolver problemas de potencias y raíces de un numero.
Li Ye (1192 - 1279)	Song	El **padre de la Geometría Analitica** en China • *Espejo marino de las medidas del círculo (1248)* • *Nuevos pasos del cálculo (1259)*
Quin Jiushao (1202 - 1261)	Song	Se le debe el famoso **"Teorema del residuo chino"** ***Tratado Matemático en Nueve Secciones (1247)***
Yang Hui (1238 – 1298)	Song	Es el matemático de los cuadrados y círculos mágicos, de las series finitas, del triángulo de Pascal y del teorema del binomio. • **Análisis detallado de los métodos matemáticos de los nueve capítulos** [4], 1261 d.C. • Métodos de cálculo para el uso diario, 1275 d.C. • Métodos de cálculo, 1275 d.C.
Zhu Shijie (1270 – 1330).	Yuan	Es el mayor descubridor y mejor expositor de series finitas. Genera además un algoritmo para extraer raíces cuadradas. ***El precioso espejo de los cuatro elementos ((Siyuan yujian, 1303)***

[2] Interpolación cuadrática: Determinar un polinomio de grado 2 conocidos tres de sus valores.

[3] Estos diez manuales, de conocimiento obligatorio para los funcionarios de la dinastía tang, son los 8 que hemos colocado anteriormente en cuadros de color verde junto con los dos más famosos de la cultura matemática china como son:

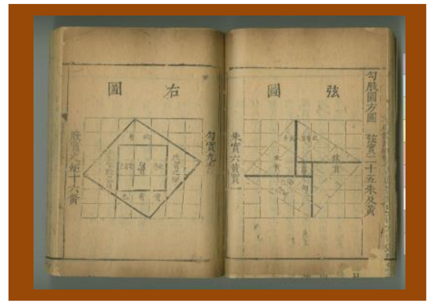
- **El Jiuzhang Suanshu o "Los nueve capítulos del arte de contar"**, Dinastía Zhou (1050-256 a.),En su capítulo ocho, *Fangcheng (forma de colmillo),* trae resueltos problemas (compra y venta de mercanciás) con múltiples variables usando un principio similar al de la **eliminación de Gauss.**
- **El zhou Bi SuanJing o "La aritmética clásica del Gnomon y las trayectorias circulares del Cielo"** (246 problemas).

[4] En esta obra aparece el famoso triangulo de Pascal, descubierto por el matemático Jian Xian , en el siglo XI, seis siglos antes del mismo Pascal .

1.2. Dos obras inmortales en las matemáticas chinas: El *Zhoubi Suanjing* y El *Jiuzhang Suanshu*

1.2.1. El Zhoubi Suanjing [5]

El ***Zhou bi Suan jing*** o *"Aritmética clásica del Gnomon y de las sendas circulares en el cielo"* es uno de los textos de matemática china más antiguos de la historia. La palabra *Zhou* se refiere a la antigua dinastía Zhou occidental (1046-771 a.C); mientras que *Bi* significa *muslo* pero, de acuerdo al libro, se refiere al gnomon de los relojes de sol ("escuadra" para los griegos). Su recopilación y adición de materiales continuaron durante la dinastía Han (202 aC – 220 dC). Matemáticos como Liu Hui (263 d.C), Zu Geng (principios del Siglo VI d.C), Li Chunfeng (602-670) y Yang Hui (1270 d.C) han expandido este texto.



El ***Zhou bi Suan jing*** es un libro de astronomía y cálculo consistente de una colección anónima de 246 problemas encontrados por el duque Wen de Zhou [6] y su astrónomo y matemático, Shang Gao. Cada pregunta tiene su respuesta numérica y su correspondiente algoritmo [7].

El ***Zhou bi Suan jing*** se preocupa por una serie de inquietudes súper interesantes acerca del diámetro de la tierra, del sol (1250 li; 1 li = ½ km) y la distancia entre estos dos, y llegan a plantear que la distancia de la tierra al sol son 100000 li. Para ello los antiguos chinos asumen:

- El radio de la tierra es de 60000 li (un li = ½ km): Desde la China hasta al final de la observación y en línea recta suponen que habían 60000 li. En ese punto final y hacia arriba ubicaban el sol.

- La distancia de la tierra al cielo (firmamento) era 80000 li

Luego, por Pitágoras o Gougu, la distancia de la tierra al sol es 100000 li (recordar, el sol está ubicado en el cielo pero en extremo de la tierra).

Hoy por hoy esos datos distan mucho de ser reales, pero muestran una seria preocupación por lo que sucede en los cielos. A propósito veamos algunos datos actuales acerca del sol, la tierra y la luna.

---

[5] Para conocer parte del contenido de este texto consultar "Zhou bi suan jing Problem Set" en http://www.astro.umd.edu/~peel/CPSP118D_101/content/Zhou_bi_suan_jing.pdf

[6] Su nombre es Dan. Y vivió en la segunda mitad del siglo XI a.C

[7] Para tener una mejor idea de este libro consultar el artículo "π en el antiguo imperio chino", de Iván Arribas, páginas 14 y 15. Al parecer el término Zhou hace referencia a la dinastía (en que el libro se escribió

Sol:

Diámetro = 1 392 000 kms
Superficie = 6,1 x 10^{12} km²
Volumen = 1, 4 x 10^{18} km^3
Masa = 2 x 10^{30} kgs

Tierra:

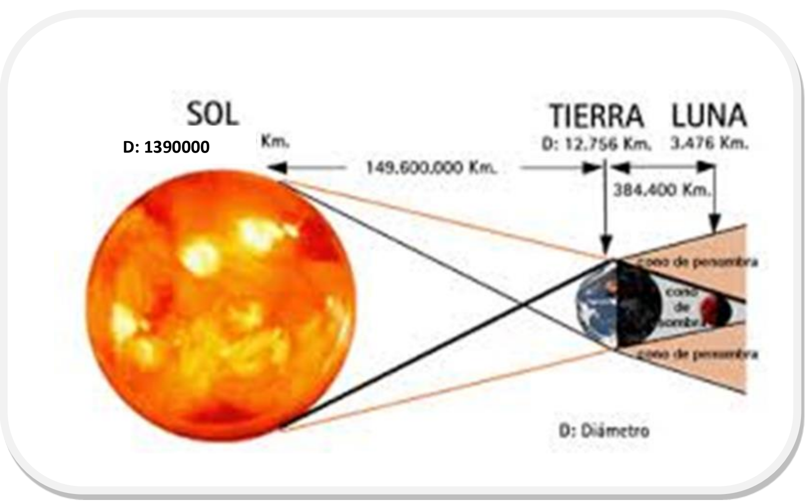
Diámetro = 12742 kms
Superficie = 51 x 10^{7} km²
Volumen = 1, 1 x 10^{12} km^3
Masa = 6 x 10^{24} kgs

Luna:

Diámetro = 3474 kms
Superficie = 36 x 10^{6} km²
Volumen = 2,2 x 10^{5} km^3
Masa = 7,3 x 10^{22} kgs

Distancias:

De la tierra a la luna = 384.400 kms
De la tierra al sol = 150 millones de kms
De la luna al sol = 149 170 300 km



1.2.2. El Jiuzhang Suanshu [8]

“Los nueve capítulos del arte matemático”

1 Numeración con varillas; Campos rectangulares. Áreas de campos de diversa formas.

2. Intercambio de bienes a tarifas distintas. Regla de tres simple, inversa y compuesta

3. Progresiones aritméticas y series. Distribución proporcional. Repartición de bienes y dinero según el principio de proporcionalidad. Intereses y porcentajes.

4. Numeración con varillas con números mixtos; extracción de raíces cuadradas y cúbicas; dimensión, área y volumen del círculo y la esfera.

5. Reflexiones sobre los trabajos. Volumen de sólidos de varias formas.

6. Impuesto equitable. Problemas de proporción más avanzados.

7. - Excedente y déficit. Problemas lineales resueltos utilizando el principio conocido más tarde en Occidente como el *Método de la regla falsa*.

8. La disposición rectangular. Numeración con varillas, problemas con múltiples variables, resueltos según un principio similar a **la eliminación de Gauss**

9. ***Gougu* - Base y altura. Problemas sobre el principio conocido en Occidente como el teorema de Pitágoras.**

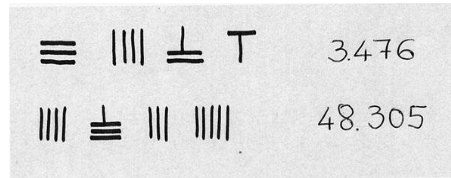
1.3. Algunos brillantes conocimientos matemáticos chinos en aritmética, geometría y álgebra.

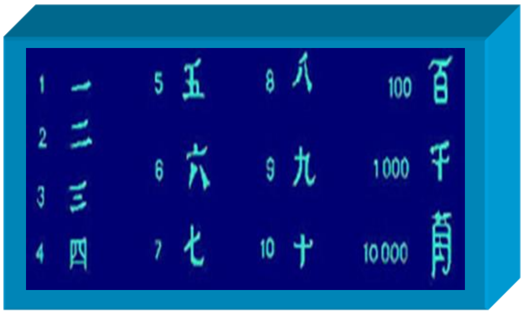
1.3.1. Aritmética

A$_1$. Sistemas de numeración. En china existieron 2 sistemas de numeración:

a. En el primero los números se representaban por pequeñas varillas de bambú o marfil; este sistema perduró muy poco, ya que se creaban problemas de confusión entre las descripciones de números grandes.

[8] Para conocer parte del contenido de este clásico texto matematico chino recomendamos el trabajo “Matemática china” que aparece en http://personal.us.es/cmaza/china/





b. El otro sistema es de la forma clásica que a usar desde el 1500 A.C. aproximadamente. Es un sistema decimal estricto que usa las unidades con símbolo distinto para cada uno de ellos. En este sistema de numeración era fundamental el orden de la escritura ya que 5 10 7 igual podría representar 57 (cinco veces diez + siete) que 75 (cinco + diez veces siete).

Los eruditos chinos por su parte desarrollaron un sistema posicional muy parecido al actual. El número cero en la cultura china aparece en el siglo VIII d.C en tla dinastía tang (618 - 907)

A_2. El Ábaco Esta gran herramienta la inventaron los chinos y aun se utiliza para hallar los resultados de las operaciones fundamentales con números enteros y fraccionarios; calculaban entre otras cosas el mínimo común denominador de varias fracciones[9].

A_3. Sistemas decimales y de pesas y medidas. Los chinos crean en su cultura el sistema decimal y también el de pesas y medidas (el emperador Qin Shi Huan, 260-210 a.C, unificó China y luego las medidas), lo cual da como resultado la implementación de decimales en el manejo de las fracciones (jinbang: libra; dan: piedra ≈ 72,57 kg; Y las unidades de longitud eran procedentes del cuerpo humano, similar a la cultura maya).

A_4. Los números negativos. Los chinos descubrieron la idea de los números negativos[10]. Estos no les causo muchas dificultades ya que estaban acostumbrados al **yin yang** (opuestos dialecticos en el taoísmo) y además a calcular usando las varillas, uno de color rojo para los positivos y de color negro para los negativos. aunque nunca los aceptaron como solución a una ecuación.

A_5. Triangulo aritmético de Yang Hui (famosamente conocido como el triángulo de Pascal). En las obras de yang hui [11] (siglo XIII d.C) aparecen suma de series finitas y el

---

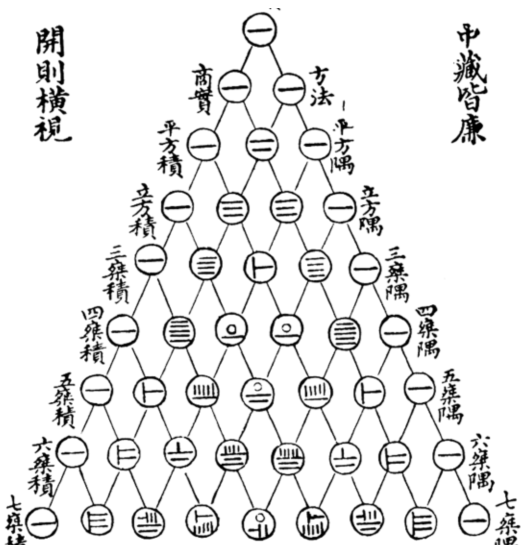
[9] Al parecer, con las fracciones hacían analogías entre sexos, refiriéndose al numerador como "el hijo" y al denominador como "la madre".

[10] Negativo: fú ; positivo: zhéng . ***Positivo o negativo:*** zhéng huó fú

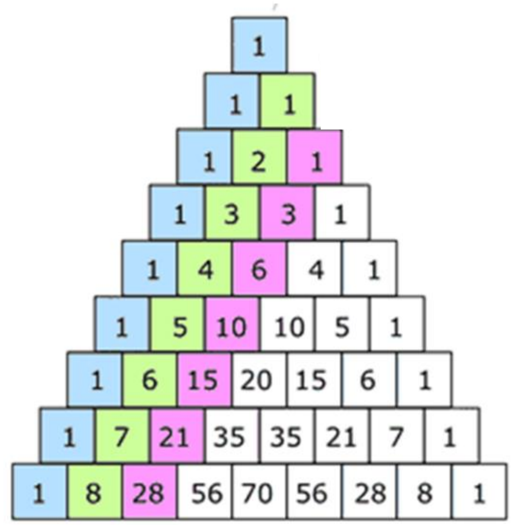
11 Análisis detallado de los métodos matemáticos de los nueve capítulos11, 1261 d.C.

llamado triángulo de pascal, autoría que éste reconoce a **Jia Xian** (alrededor del año 1100 d.C). Estos triángulos también son mencionados por **Zhu Shi-jie**, en su obra “el precioso espejo de los cuatro elementos” (Siyuan yujian, 1303), son usados para el teorema binomial y en la obtención de potencias de enteros positivos.

-

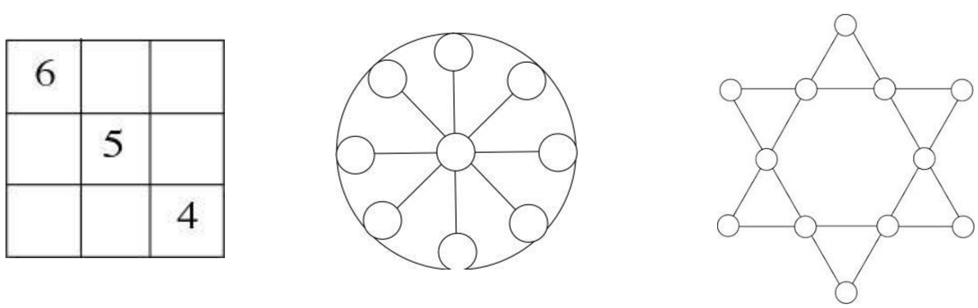


Triángulo de Yang Hui (1262 d.C)



Triángulo de Pascal (1654 d.C)

A_6. Los cuadrados mágicos y otras figuras de ese modelo: Lúdica con sistemas de ecuaciones lineales



Los chinos han sido siempre muy aficionados al diseño armónico, aritmético o geométrico. Estos cuadraditos motivaron y reforzaron el estudio de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales en el “***Jiuzhang Suanshu”*** o “los nueve capítulos del arte matemático”. Lo fundamental de estos cuadros y diferentes figuras consistía en que en todos sus lados la suma diera el mismo resultado.

Métodos de cálculo para el uso diario, 1275 d.C.
Métodos de cálculo, 1275 d.C.

1.3.2. Geometría

Creadores del compás y de la escuadra tal como se refleja en la siguiente obra de arte

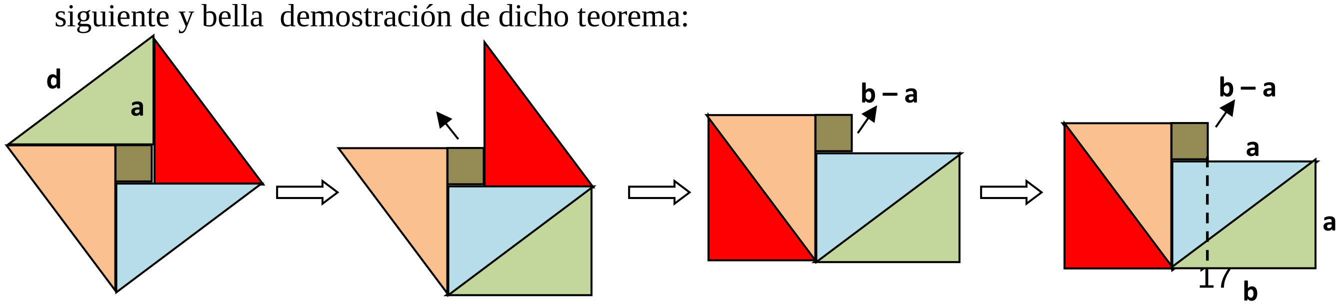
Cuadro de la copulación entre Fuxi y Nüwa (reyes mitológicos): el primero toma en sus manos ***la "escuadra" Ju*** mientras que ella sostiene el ***"compás" Gui***, ya que, según la tradición cultural china, el hombre tiene que ser recto y fuerte mientras que la mujer debe ser flexible y receptiva.

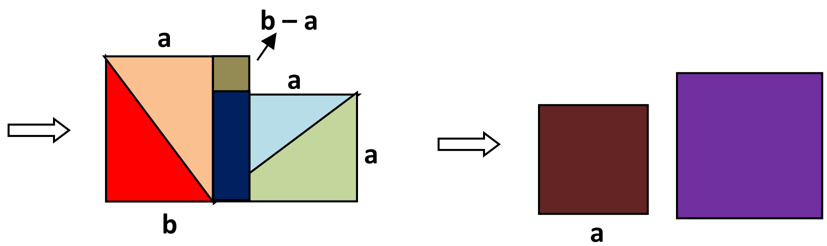
Al igual que en otros lados, los chinos generan las figuras geométricas lineales bi y tridimensionales (triángulos, rectángulos, polígonos regulares, trapecios, círculos, prismas, cilindros, esferas, etc.) y se interesan por sus áreas y volúmenes.

En la matemática China, lo mismo que en otras culturas antiguas, se ve preocupación por el cálculo de PI, empezando por 3. En la búsqueda de valores más exactos, aparece Liu Hui quien obtiene el valor de 3,14 usando un polígono regular de 96 lados; y posteriormente los matemáticos **Zu Chongzhi (429 – 500) y su hijo Zu Geng**, quienes vivieron en la época de las dinastías Norte y Sur (420 – 581, más precisamente en la dinastía Song del sur), dan la siguiente aproximación del número π,

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

Y no se puede olvidar en esta parte geométrica que ellos tienen la versión del teorema de Pitágoras conocida como "El Teorema de Gougu" muy bien trabajado en las dinastías Han (206 a.C – 220 d.C) y dinastías Wei (184 – 283 d.C) y Jin (265 a.C – 421 d.C). En estas últimas el matemático ***Zhao Huang*** (en los años 270 aproximadamente)   presenta la siguiente y bella demostración de dicho teorema:





Desarrollo del th de Pitágoras por Zhao Huang, 270 d.C

1.3.3. Algebra

A_1. El método de eliminación para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este proceso aparece en capítulo 8 del *Jiuzhang Suanshu* o "Los nueve capítulos del arte matemático"; capitulo denominado Fangcheng (ecuación) y muy bien comentado por Liu Hui (siglo III).

A_2. El álgebra en el siglo XIII d. C. La escuela algebraica china alcanza su apogeo en el siglo XIII con los trabajos de **Quin Jiushao** [12], **Li Ye**, **Yang Hui** y **Zhu Shi jie** que idearon un procedimiento para la resolución de ecuaciones de grado superior llamado método del elemento celeste o tian-yuanshu (evaluación de un polinomio en un número real). Este método actualmente se conoce como método de Horner matemático que vivió medio milenio más tarde.
El desarrollo del álgebra en esta época es grandioso: sistemas de ecuaciones no lineales, sumas de sucesiones finitas, utilización del cero, triángulo de Tartaglia (o Pascal) y coeficientes binomiales así como métodos de interpolación que desarrollaron en unión de una potente astronomía.

Suplemento: Actividades para el lector

1. Dos Cuadrados Mágicos de orden 4. Encuentre dos formas de completar el cuadrado 4 x 4 (de la izquierda de más abajo) con los números naturales faltantes comprendidos entre el 1 y el 16 de modo tal que los cuadrados resultantes sean mágicos (en este caso la constante mágica es 34). Usar los cuadrados de la derecha de más abajo para rellenar adecuadamente el cuadrado de la izquierda.

1			4
	6	7	
8			5
	3	2	

1			4
	6	7	
8			5
	3	2	

1			4
	6	7	
8			5
	3	2	

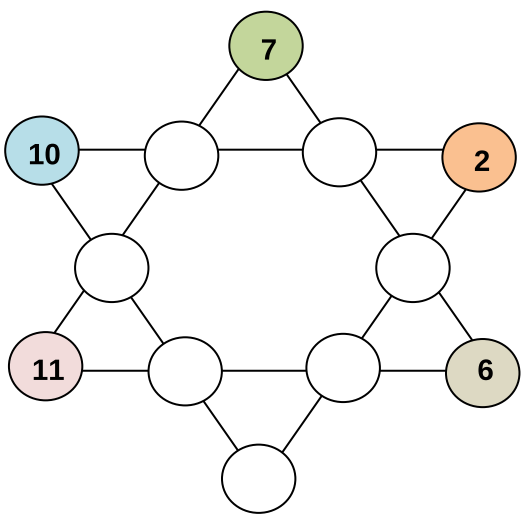
[1212] A este matemático **Quin Jiushao** (1202 - 1261) se debe el famoso "Teorema del residuo chino".

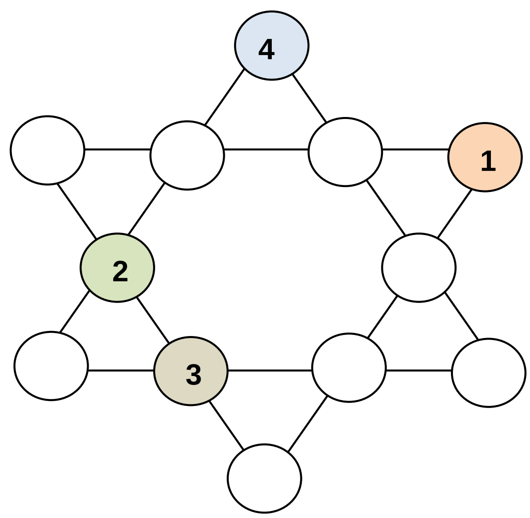
2. Un Cuadrado Mágicos de orden 5. Completar el cuadrado 5 x 5 (de la izquierda de más abajo) con los números naturales faltantes comprendidos entre el 1 y el 25 de modo tal que el cuadrado resultantes sea mágico (en este caso la constante mágica es 65).

4		25		2
			18	12
	17	13	9	
14		21		6
	11		7	

4		25		2
			18	12
	17	13	9	
14		21		6
	11		7	

3. Colocar los números faltantes (del 1 al 12) de tal modo que las siguientes estrellas sean mágicas (la suma de los lados debe ser la misma = 26).





Capítulo 2: Proyecto de aula N^{o} 1

Los Fascinantes Cuadrados Mágicos en la China

A continuación se muestra el primero de los siete proyectos de aula que se aplicaron para el desarrollo de este trabajo. Estos constan de tres partes: Marco teórico, actividades en clase y actividades fuera de clase. En la portada inicial de los mismos se pueden evidenciar los objetivos, los valores y actitudes; Además, se muestra la transversalización de las asignaturas que se emplean en cada uno.

Los conceptos y ejemplos que se plantean en cada proyecto le permitirán al estudiante apropiarse del tema que se va a trabajar para posteriormente tener herramientas adecuadas a la hora de desarrollar las actividades prácticas.

No sobra decir que el contenido de cada uno de estos proyectos junto con otras 12 lecciones sobre las matemáticas son ya conocidos por los estudiantes de la licenciatura de matemáticas y física de la Universidad Tecnológica de Pereira que participaron en los cursos de Historia y Epistemología, Enseñanza de las matemáticas y Matemáticas recreativas impartidos en el segundo semestre de 2016 y primer semestre del año en curso (2017) por el docente Julián Guzmán Baena. Gracias la participación estudiantil en la actividades, colaboraciones de las lecturas de los mismos, sus análisis, críticas y correcciones, los proyectos resultaron de gran interés cognitivo y se espera sean una semilla transformadora didáctica en la transmisión matemática para los niveles básicos educativos (primaria y secundaria).

Los siete proyectos que a continuación empezamos a describir por capítulos, con su respectiva población, son los siguientes:

Proyecto 1: Los Fascinantes Cuadrados Mágicos en La China.

Población: Historia y epistemología de las matemáticas (13 estudiantes).

Proyecto 2: El método chino de eliminación para ecuaciones lineales

Población: Historia y epistemología de las matemáticas (13 estudiantes).

Proyecto 3: Teorema de Pitágoras nivel Chino

Población: Docentes de matemáticas (2 licenciados).

Proyecto 4: Los círculos mágicos más simples de Yang Hui

Población: Docentes de matemáticas (2 licenciados).

Proyecto 5: Los Cuatro Círculos Concéntricos de Yang Hui

Población: Docentes de matemáticas (2 licenciados).

Proyecto 6: Suma general de los números naturales en la China

Población: Matemáticas recreativas (6 estudiantes).

Proyecto 7: Suma general de los cuadrados de los números naturales en la China

Población: Enseñanza de las matemáticas (8 estudiantes)

Comentario: actitud de los estudiantes ante estos proyectos. Se pudo constatar:

La postura que toma cada estudiante a la hora de enfrentar un problema influye en el desarrollo del mismo, ya que depende de la actitud al abordar un tema el poder sobrepasar los obstáculos que se puedan presentar, es decir que, si un estudiante tiene una posición negativa, difícilmente pueda superar las dificultades que tenga y por el contrario, si el estudiante está dispuesto a aprender, se logrará un aprendizaje constructivo y significativo, permitiéndole superar las adversidades.

Al ser proyectos nuevos e innovadores que normalmente no se trabajan en el aula los estudiantes tuvieron una disposición permanente a aprender. Sin embargo, en la realización de los proyectos de aula los estudiantes presentaron distintas formas de resolverlos y nuevas inquietudes que permitieron una mayor interactividad con los mismos. Se propició un desarrollo cooperativo en busca de las soluciones, facilitando así sus desarrollos.

De igual manera se reflejaron diversas dificultades al momento de enfrentarse a este tipo de problemas. Esta situación indica que el tradicionalismo no logra, en la mayoría de los casos, una buena aprehensión del conocimiento y que, al momento de aplicar diversas situaciones a contextos diferentes, el estudiante no reconoce la forma correcta de solucionar determinado problema.

Es notorio el hecho de que el estudiante se ve limitado a la hora de contextualizar y resolver problemas de aplicación aunque reconozca los procesos matemáticos que lo enmarcan. Es así como se produce una apatía hacia las matemáticas debido a una clara frustración que aísla el razonamiento lógico y le imposibilita ver su solución.

Dinámica usada en la realización de los proyectos: Al momento de desarrollar cada proyecto se siguieron los pasos que se muestran a continuación:

1. **Motivación inicial**: en esta etapa se les aborda (estudiantes o docentes) a través de preguntas que los impulsa a pensar sobre qué tema se podría tratar en este encuentro y como creen que estos antepasados (chinos) solucionaban estos problemas.

2. **Desarrollo**: se les entrega la guía con indicaciones previas a su realización. Se les da el espacio para que realicen sus producciones.

3. **Cierre**: Para esta última fase se reciben las guías y se realiza un debate de donde se extraen conclusiones y recomendaciones que son de gran aporte para la retroalimentación.

Es de anotar que, en el caso de los estudiantes, se tenía conocimiento de su actitud, destrezas, habilidades y formas de pensar previamente ya que es una población conocida por el docente Julián Guzmán (docente asignado para orientar estos cursos).

Proyecto de aula Nº 1

Los Fascinantes Cuadrados Mágicos en La China

Nombre:	Los fascinantes cuadrados mágicos en la China
Profesión :	
Área:	
Objetivo:	Desarrollar el pensamiento lógico matemático utilizando cuadrados mágicos como herramienta interactiva y dinámica con el fin de fomentar destrezas y habilidades matemáticas en el estudiante.
Transversalización	Matemática, lógica, teoría de números, Historia y Pedagogía
Valor y actitud:	Responsabilidad, solidaridad y perseverancia
Docente:	Jennifer Andrea Posada García
Asesor:	Julián Guzmán Baena

Recursos

- Guías
- Tablero
- Humano
- Regla
- Hojas o cartulina

Tiempo estimado: 3 horas

Nivel de escolaridad: Grado séptimo de educación básica

Evaluación

La evaluación de esta actividad tendrá en cuenta diversos aspectos.

- Un 50% de trabajo en clase ya que es primordial el desarrollo de las guías para fortalecer y ver otros horizontes del conocimiento que se tiene.
- Un 20% de participación en el principio y el cierre de la actividad ya que se agruparan las conclusiones dadas en la guía y las observaciones que los estudiantes puedan brindar, además se realizara algunas preguntas de los datos dados.
- Un 30% de la entrega del trabajo finalizado con sus respectivas actividades.

Parte I: Marco teórico

Tiempo estimado: 2 horas

A. Definición e Ilustraciones. Un **cuadrado mágico de orden n** es una tabla donde se dispone de una serie de números enteros en un cuadrado o matriz de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales principales sea la misma. Esta suma invariante se denomina "constante mágica". Usualmente los números empleados para rellenar las casillas son números naturales consecutivos, del 1 al n^2, siendo n el número de columnas y filas del cuadrado mágico. En este caso puede probarse [13]que la constante mágica es la suma de los números de la diagonal principal del cuadrado donde los números están bien ordenados de menor a mayor del 1 al n^2 = $\frac{\mathbf{n\,(n^2+1)}}{\mathbf{2}}$

Ilustración 1. Un cuadrado mágico de orden 3 y su constante mágica 15

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Constante mágica = 15
1 + 5 + 9 = 15

2	9	4
7	5	3
6	1	8

• Invarianza del número 15 por las sumas en filas, columnas y diagonales

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Sumas por filas:
2 + 9 + 4 = **15**
7 + 5 + 3 = **15**
6 + 1 + 8 = **15**

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Sumas por columnas:
2 + 7 + 6 = **15**
9 + 5 + 1 = **15**
4 + 3 + 8 = **15**

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Sumas por diagonales:
2 + 5 + 8 = **15**
4 + 5 + 9 = **15**

Constante mágica = **15** $\left(= \frac{\mathbf{3\,(3^2+1)}}{\mathbf{2}}\right)$

---

[13] Los números en cada columna suman lo mismo, digamos K. Luego K∗ n es la suma de todos los números naturales del 1 al n^2, esto es, K∗ n = ½ n^2 (n^2 + 1). Luego, **K = ½ n (n^2 + 1)**

•La diagonal principal en el cuadrado con los números naturales bien ordenados de menor a mayor es la sucesión: 1, n+2, 2n + 3 , 3n + 4, . . ., (n-1)n + n (= n^2) . La suma de estos números es la serie aritmética de n términos y de razón n+1, cuyo valor es: (1 + 2 + . . . + n) + n [1 + 2 + . . . + (n-1)] = [1 + 2 + . . . + (n- 1)] (1+ n) + n = ½ (n – 1)n (1 +n) + n = ½(n^2 – 1)n + n = ½ n (n^2 – 1 + 2) = ½ n (n^2 +1) = **K**

Ilustración 2. Un cuadrado mágico de orden 4 y su constante mágica 34

1	2	3	4
5	**6**	7	8
9	10	**11**	12
13	14	15	**16**

Constante mágica = **34**
1 + **6** + **11** + **16** = **34**

4	**5**	**16**	**9**
14	**11**	**2**	**7**
1	**8**	**13**	**12**
15	**10**	**3**	**6**

• Invarianza del número 34 por las sumas en filas, columnas y diagonales

4	**5**	**16**	**9**
14	**11**	**2**	**7**
1	**8**	**13**	**12**
15	**10**	**3**	**6**

Sumas por filas:
4 + 5 + 16 + 9 = **34**
14 + 11 + 2 + 7 = **34**
1 + 8 + 13 + 12 = **34**
15 + 10 + 3 + 6 = **34**

4	**5**	**16**	**9**
14	**11**	**2**	**7**
1	**8**	**13**	**12**
15	**10**	**3**	**6**

Sumas por columnas:
4 + 14 + 1 + 15 = **34**
14 + 11 + 2 + 7 = **34**
16 + 2 + 13 + 3 = **34**
9 + 7 + 12 + 6 = **34**

4	**5**	**16**	**9**
14	**11**	**2**	**7**
1	**8**	**13**	**12**
15	**10**	**3**	**6**

Sumas por diagonales:
4 + 11 + 13 + 6 = **34**
9 + 2 + 8 + 15 = **34**

Constante mágica = 34 $\left(= \frac{4\,(4^2+1)}{2}\right)$

Ilustración 3. Un cuadrado mágico de orden 5 y su constante mágica 65

1	2	3	4	5
6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15
16	17	18	**19**	20
21	22	23	24	**25**

Constante mágica = **65**
1 + **7** + **13** + **19** + **25** = **65**

11	**4**	**17**	**10**	**23**
20	**8**	**21**	**14**	**2**
24	**12**	**5**	**18**	**6**
3	**16**	**9**	**22**	**15**
7	**25**	**13**	**1**	**19**

• Invarianza del número 65 por las sumas en filas, columnas y diagonales

11	4	17	10	23
20	8	21	14	2
24	12	5	18	6
3	16	9	22	15
7	25	13	1	19

Sumas por filas:
11 + 4 + 17 + 10 + 23 = **65**
20 + 8 + 21 + 14 + 2 = **65**
24 + 12 + 5 + 18 + 6 = **65**
3 + 16 + 9 + 22 + 15 = **65**
7 + 25 + 13 + 1 + 19 = **65**

11	4	17	10	23
20	8	21	14	2
24	12	5	18	6
3	16	9	22	15
7	25	13	1	19

Sumas por columnas:
11 + 20 + 24 + 3 + 7 = **65**
4 + 8 + 12 + 16 + 25 = **65**
17 + 21 + 5 + 9 + 13 = **65**
10 + 14 + 18 + 22 + 1 = **65**
23 + 2 + 6 + 15 + 19 = **65**

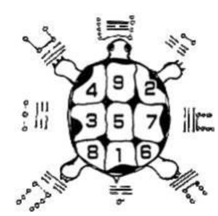
11	4	17	10	23
20	8	21	14	2
24	12	5	18	6
3	16	9	22	15
7	25	13	1	19

Sumas por diagonales:
11 + 8 + 5 + 22 + 19 = **65**
23 + 14 + 5 + 16 + 7 = **65**

Constante mágica = **65** $\left(= \frac{\mathbf{5\,(5^2+1)}}{\mathbf{2}}\right)$

B. Una breve Historia sobre los cuadrados mágicos

B$_1$. El mito en el cuadrado magico 3 x 3 (“**Luo Shu**” u Hoja del Rio) [14].



En la antigua China ya se conocían los cuadrados mágicos desde el III milenio a. C. Cuenta la historia que un cierto día se produjo el desbordamiento del Río Luo [15] ; la gente para calmar su ira hacen ofrendas al dios de ese río (Lo). Sin embargo, cada vez que lo hacían, aparecía una tortuga que rondaba la ofrenda pero no la aceptaba, y los desbordamientos continuaban. Hasta que un chico se dio cuenta de las peculiares marcas del caparazón de la tortuga, las cuales eran un cuadrado mágico 3 x3 con la constante mágica 15; de este modo pudieron incluir en su ofrenda la cantidad pedida (15), quedando el dios satisfecho y volviendo las aguas a su cauce.

[14] Extraído del artículo “El cuadrado mágico” de https://es.wikipedia.org/wiki/Cuadrado_m%C3%A1gico
[15] El río Luo discurre por el centro-oeste de República Popular de China, es uno de los principales afluentes del río Amarillo. La longitud del río es de 420 kilómetros.

B$_2$. *Shen Luan* y Yang Hui: Matemáticos chinos en cuadrados mágicos.

Shen Luan [16]. Vivió en la época de los reinos Norte y Sur, 184 – 283, dinastía Wei. Era astrónomo dedicado a la construcción de calendarios. Su calendario Tian Hé fue adoptado oficialmente.

En su obra "Memoria de algunas tradiciones del arte matemático", una de "Los diez manuales matemáticos", se introducen por primera vez diagramas de filas y columnas que actualmente se conocen como cuadrados mágicos. Además, en la misma obra, presenta los primeros diseños del ábaco cuyo uso se generalizó a partir del siglo XIII d.C.

Yang Hui. (1238 – 1298). Vivió en el período de la dinastía Song (960-1279). Es el matemático de los cuadrados y círculos mágicos (círculos concéntricos y no concéntricos); y de una presentación sistemática y didáctica del Triángulo de Pascal, diciendo que lo aprendió del tratado de **Jia Xian** (siglo XI d.C). Los trabajos de Yang son los primeros en que aparecen ecuaciones cuadráticas con coeficientes negativos, si bien se lo atribuye a su antecesor, el matemático Liu Yi. Entre sus obras tenemos tres fundamentales:

Análisis detallado de los métodos matemáticos de los nueve capítulos[17], 1261 d.C.

Métodos de cálculo para el uso diario, 1275 d.C.

Métodos de cálculo, 1275 d.C.

Los temas cubiertos por Yang en su obra "Métodos de cálculo", además de trabajar los cuadrados mágicos, incluye multiplicación, división, extracción de raíces, ecuaciones cuadráticas y simultáneas, series, cálculos de áreas de un rectángulo, un trapecio, un círculo y otras figuras.

Según los escritores *O'Connor* y *Robertson* en su artículo sobre la vida de Yang Hui (2003)[18], este matemático chino presenta los cuadrados mágicos a nivel docente como una buena manera de motivar a la gente en números, y él no reclama ninguna propiedad mágica. Yang no usa la palabra magia, simplemente los denominó **diagramas numéricos**. Tales diagramas o cuadrados mágicos, reiteramos, aparecen en su obra "Métodos de cálculo" (1275). Allí exhibe un cuadrado mágico de orden 3, dos cuadrados de orden 4, dos cuadrados de orden 5, dos cuadrados de orden seis, dos cuadrados de orden 7, dos de orden 8, uno de orden nueve y uno de orden 10.

[16] Lo que en este párrafo se describe fue tomado del trabajo "Las Matemáticas Chinas" de Maria Nieve Algarra, Isabel Garcia y Verónica Hernandez, pagina 33, año 2004 y se halla en la dirección de internet http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf

[17] En esta obra aparece el famoso triangulo de Pascal, descubierto por el matemático Jian Xian , en el siglo XI, seis siglos antes del mismo Pascal .

[18] Este artículo se halla en http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yang_Hui.html

Uno de los aspectos más notables de su trabajo es el documento sobre la educación matemática Xi Suan Gang Mu (Un plan de estudios de las matemáticas). Es un documento importante e inusual existente en la educación matemática en la antigua China. No sólo se especifica el contenido y el calendario de un programa de estudio integral en matemáticas, sino que también explica la razón de ser del diseño de dicho plan de estudios. Se hace hincapié en un programa sistemático y coherente que se basa en la comprensión real más que en el aprendizaje directo. Este programa es una notable mejora respecto a la forma tradicional de aprender matemáticas , forma que consistía en que a un estudiante se le asignaban ciertos textos clásicos, para ser estudiados uno seguido por el otro, cada uno por un período de uno a dos años.

B$_3$. Los cuadrados mágicos en el occidente. La introducción de los cuadrados mágicos en occidente se atribuye a Manuel Moschopoulos (1265 – 1316) en torno al siglo XIV, autor de un manuscrito en el que por vez primera se explican algunos métodos para construirlos. Con posterioridad, el estudio de sus propiedades, ya con carácter científico, atrajo la atención de grandes matemáticos que dedicaron al asunto obras diversas a pesar de la manifiesta inutilidad práctica de los cuadrados mágicos. Entre ellos cabe citar a Stifel, Fermat, Pascal, Leibnitz y Euler; diríase que ningún matemático ilustre ha podido escapar a su hechizo.

Parte II: Actividades en clase **Tiempo estimado: 1 hora**

1. Dos Cuadrados Mágicos de orden 4. Encuentre dos formas de completar el cuadrado 4 x 4 (de la izquierda de más abajo) con los números naturales faltantes comprendidos entre el 1 y el 16 de modo tal que los cuadrados resultantes sean mágicos (en este caso la constante mágica es 34). Usar los cuadrados de la derecha de más abajo para rellenar adecuadamente el cuadrado de la izquierda.

	16	13	
11			10
	9	12	
14			15

	16	13	
11			10
	9	12	
14			15

	16	13	
11			10
	9	12	
14			15

2. Un Cuadrado Mágicos de orden 5. Completar el cuadrado 5 x 5 (de la izquierda de más abajo) con los números naturales faltantes comprendidos entre el 1 y el 25 de modo tal que el cuadrado resultantes sea mágico (en este caso la constante mágica es 65). Usar el cuadrado de la derecha de más abajo para rellenar adecuadamente el cuadrado de la izquierda.

	19	25	15	
20			18	
	17	13		23
14		21	16	
24				22

	19	25	15	
20			18	
	17	13		23
14		21	16	
24				22

Parte III. Actividad fuera de clase: **Dos cuadrados mágicos de orden 6**

Encuentre dos formas de completar el cuadrado 6 x 6 (de la izquierda de más abajo) con los números naturales faltantes comprendidos entre el 1 y el 36 de modo tal que los cuadrados resultantes sean mágicos.

	22	18	27		20
31		36		29	
	21	14	23		25
30			32	34	
	26		19		24
	35	28		6	33

Capítulo 3: Proyecto de aula N^o 2

El método chino de eliminación para ecuaciones lineales

Nombre:	El método chino de eliminación para ecuaciones lineales
Profesión :	
Área:	
Objetivo:	Dar a conocer de modo didáctico y práctico el método de eliminación creado por los antiguos chinos.
Transversalización	Algebra lineal, Historia y Pedagogía
Valor y actitud:	Paciencia, voluntad y responsabilidad
Docente:	Jennifer Andrea Posada García
Asesor:	Julián Guzmán Baena

Recursos

- Guías
- Tablero
- Humano

Tiempo estimado: 4 horas

Nivel de escolaridad: Grado noveno de educación básica

Evaluación

La evaluación de esta actividad tendrá en cuenta diversos aspectos.

- Un 50% de trabajo en clase ya que es primordial el desarrollo de las guías para fortalecer y ver otros horizontes del conocimiento que se tiene.
- Un 20% de participación en el principio y el cierre de la actividad ya que se agruparan las conclusiones dadas en la guía y las observaciones que los estudiantes puedan brindar, además se realizara algunas preguntas de los datos dados.
- Un 30% de la entrega del trabajo finalizado con sus respectivas actividades.

Comentario: Este segundo proyecto permite conocer el trabajo que los matemáticos Chinos desarrollaron para resolver sistemas de ecuaciones 2x2 y 3x3. Esto brinda la posibilidad de que el estudiante valore el desarrollo que han tenido estos procesos matemáticos partiendo de problemas concretos que la sociedad china necesitaba resolver ("una nueva forma de ver las matemáticas a partir de la heurística") y cuyas soluciones daban lugar a los métodos generales tan conocidos en álgebra lineal.

Parte I: Marco teórico

Tiempo estimado: 2 horas

A. Antecedentes chinos del método de eliminación. Verdaderamente es justo decir que el texto Jiuzhang Suanshu (***"Nueve Capítulos de Arte Matemático")***[19]**,** capítulo 8 (**Fangcheng: ecuación**), escrito durante la dinastía china Han, entre los años 200 a.C y 200 d. C., da los primeros ejemplos conocidos sobre métodos matriciales.

A continuación trataremos dos de estos problemas extraídos del documento "Matemáticas en China" el cual aparece en la dirección http://personal.us.es/cmaza/china/ecuaciones.htm

B. Un primer problema: Problema 8.13 del Jiuzhang Suanshu

"Cinco recipientes grandes y uno pequeño tienen una capacidad total de 3 shi. Un recipiente grande y cinco pequeños tienen una capacidad de 2 shi. Hallar la capacidad de un recipiente grande y de uno pequeño".

Solución

En nuestro tiempo, escribimos las ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
5x + 1y &= 3 \\
1x + 5y &= 2
\end{aligned}
$$

donde **x** es la capacidad en shi de un recipiente grande; **y** es la capacidad en shi de un recipiente pequeño [20].

Para resolver este problema el autor coloca en columnas de derecha a izquierda los coeficientes del sistema de las dos ecuaciones lineales en una especie de "tablero contador" , comenzando por la ecuación 1ª

	5	x
	1	y
	3	CI

1	5	x
5	1	y
2	3	CI

[19] Para una mejor idea de esos nueve capítulos consultar en internet las siguientes direcciones:
- https://es.wikipedia.org/wiki/Jiuzhang_Suanshu
- http://personal.us.es/cmaza/china/ecuaciones.htm, del documento "Matemáticas en China"

[20] Por Cramer la solución de este sistema es x = 13/24 y = 7/24

El autor escribió instrucciones al lector 200 años a. C (acá por facilidad y en aras de generalizar algorítmicamente el método vamos a usar números negativos aunque en la solución original no los emplea; y trabajamos de izquierda a derecha, sentido contrario al de la verdadera solución china):

Paso 1: Transformaciones en las columnas 1 y 2, buscando un cero en la primera fila de la 2ª.

1	5
5	1
2	3

$\xrightarrow[-1C_2]{5C_1}$

5	– 5
25	– 1
10	– 3

$\xrightarrow{\mathbf{C_1 + C_2 \to C_2}}$

5	0
25	24
10	7

$\xrightarrow{1/5\ \ C_1}$

1	0
5	24
2	7

Breve explicación: Multiplicar la columna uno por 5 y la columna dos por – 1; Sumar luego estas dos nuevas columnas para generar una nueva columna dos. Esto es,

$$5 * 1^{a}\text{ columna} + (-1) * 2^{a}\text{ columna} = 2^{a}\text{ columna}$$

La nueva columna uno se divide por 5 para volver a la columna primera original

Paso 2: Hallazgo de los valores x, y.

Del paso 1 tenemos:

1	5	x
5	1	y
2	3	CI

$\Longrightarrow$

1	0	x
5	24	y
2	7	CI

Esta última tabla, leyendo sus columnas de derecha a izquierda, da lugar al siguiente sistema simplificado:

$$\begin{aligned} 0x + 24y &= 7 \\ 1x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

De donde, por la 1ª ecuación, **y** = **7/24**

Sustituyendo este valor en la 2ª ecuación se tiene: **x** = 2 – 35/24 = **13/24**

Rta: El recipiente grande tiene una capacidad de 13/24 shi (x = 13/24);
El recipiente pequeño tiene una capacidad de 7/24 shi (y = 7/24)

Comentario. Este método, conocido ahora como Eliminación Gaussiana, no se volvería a retomar sino hasta inicios del siglo XIX.

C. Un segundo problema: Problema 8.1 del del Jiuzhang Suanshu

"Hay tres tipos de cereal, de los cuales tres fardos del primero[21], dos del segundo, y uno del tercero hacen 39 unidades de medida de capacidad. Dos del primero, tres del segundo y 1 del tercero hacen 34 unidades de medida. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 unidades de medida. ¿Cuántas unidades de medida de cereal son contenidas en un fardo de cada tipo? "

Solución

En nuestro tiempo, escribimos las ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 1z &= 39 \\ 2x + 3y + 1z &= 34 \\ 1x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

donde **x** es la capacidad en unidades de un fardo de tipo 1, **y** es la capacidad en unidades de un fardo de tipo 2 y **z** es la capacidad en unidades de un fardo de tipo 3 [22].

Para resolver este problema, el autor hace algo realmente extraordinario. Coloca en columnas de derecha a izquierda los coeficientes del sistema de las tres ecuaciones lineales en una especie de "tablero contador", comenzando por la ecuación 1ª

		3	x
		2	y
		1	z
		39	CI

	2	3	x
	3	2	y
	1	1	z
	34	39	CI

1	2	3	x
2	3	2	y
3	1	1	z
26	34	39	CI

Más extraordinario, es que el autor escribió instrucciones al lector 200 años a. C (acá por facilidad y en aras de generalizar algorítmicamente el método que se va a usar es de números negativos aunque en la solución original no los emplean; y se trabaja de izquierda a derecha, sentido contrario al de la verdadera solución china):

Paso 1: Transformaciones en las columnas 1 y 2, buscando un cero en la primera fila de la 2ª.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

$\Rightarrow$ $2C_1 - 1C_2$

2	− 2	3
4	− 3	2
6	− 1	1
52	− 34	39

$\Rightarrow$ $C_1 + C_2 \rightarrow C_2$

2	0	3
4	1	2
6	5	1
52	18	39

[21] Se denomina fardo a un recipiente de paja (cilíndrico o prismático) donde se guardan alimentos para los animales. Aceptamos que dos fardos del mismo cereal tienen la misma capacidad; pero dos fardos de distintos cereales pueden tener capacidades distintas.

[22] Por Cramer la solución de este sistema es $x = 37/4$ $y = 17/4$ $z = 11/4$

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{2} C_2$

1	0	3
2	1	2
3	5	1
26	18	39

Breve explicación: Multiplicar la columna uno por 2 y la columna dos por – 1; Sumar luego estas dos nuevas columnas para generar una nueva columna dos. Esto es,

$$2 * 1^{a} \text{ columna } + (-1) * 2^{a} \text{ columna } = 2^{a} \text{ columna}$$

La nueva columna uno se divide por 2 para volver a la columna primera original

Paso 2: Transformaciones en las columnas 1 y 3, buscando un cero en la primera fila de la 3ª columna.

1	0	**3**
2	1	2
3	5	1
26	18	39

$\Longrightarrow$ $3C_1$ $-1C_3$

3	0	**– 3**
6	1	**– 2**
9	5	**– 1**
78	18	**–39**

$\Longrightarrow$ $C_1 + C_3 \rightarrow C_3$

3	0	**0**
6	1	**4**
9	5	**8**
78	18	**39**

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{3} C_1$

1	0	0
2	1	4
3	5	8
26	18	39

Breve explicación: Multiplicar la columna uno por 3 y la columna 3 por –1; Sumar luego estas dos nuevas columnas para generar una nueva columna tres:

$$3 * 1^{a} \text{ columna} + (-1) * 3^{a} \text{ columna } = 3^{a} \text{ columna}$$

La nueva columna uno se divide por 1/3 para volver a la columna primera original

Paso 3: Transformaciones en las columnas 2 y 3, buscando un cero en la segunda fila de la 3ª columna.

1	0	0
2	**1**	**4**
3	5	8
26	18	39

$\Longrightarrow$ $4C_2$ $-1C_3$

1	**0**	**0**
2	**4**	**– 4**
3	**20**	**– 8**
26	**72**	**– 39**

$\Longrightarrow$ $C_1 + C_3 \rightarrow C_3$

1	**0**	**0**
2	**4**	**0**
3	**20**	**12**
26	**72**	**33**

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{4} C_2$; $\frac{1}{3} C_3$

1	0	0
2	1	0
3	5	4
26	18	11

Breve explicación: Multiplicar la columna dos por 4 y la columna 3 por –1; Sumar luego estas dos nuevas columnas para generar una nueva columna tres:

$$4 * 2^{a} \text{ columna} + (-\ 1) * 3^{a} \text{ columna} = 3^{a} \text{ columna}$$

La nueva columna dos se divide por 1/4 para volver a la columna primera original; y la nueva columna tres se divide por 1/3 para simplificar sus valores.

Paso 4: Hallazgo de los valores x, y, z.

Del paso 1 al paso 3 tenemos:

1	2	3	x
2	3	2	y
3	1	1	z
26	34	39	CI

⇨

1	0	0	x
2	1	0	y
3	5	4	z
26	18	11	CI

Esta última tabla, leyendo sus columnas de derecha a izquierda, da lugar al siguiente sistema simplificado:

$$\begin{aligned} 0x + 0y + 4z &= 11 \\ 0x + 1y + 5z &= 18 \\ 1x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

De donde, por la 1^{a} ecuación, **z** = **11/4**

Sustituyendo este valor en la 2^{a} ecuación se tiene: **y** = 18 – 55/4 = **17/4**

Y sustituyendo los valores de **y** y **z** en la 3^{a} ecuación:

x = 26 – 34/4 – 33/4 = (104 – 67)/4 = **37/4**

Rta: El fardo del tercer tipo tiene una capacidad de 11/4 unidades (z = 11/4) ;
El fardo del segundo tipo tiene una capacidad de 17/4 unidades (y = 11/4) ;
El fardo del primer tipo tiene una capacidad de 37/4 unidades (z = 37/4) ;

Parte II: Actividades en clase

Tiempo estimado: 2 horas

Resolver los siguientes problemas usando el método chino para los sistemas de ecuaciones que de ellos se generan

Problema 1: Si a los dos términos de una fracción se añade 3, el valor de la fracción es 1/2 , y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es 1/3. Hallar la fracción.

Rta: 5/13

Problema 2. Pedro gasta 30840 pesos en la compra de azúcar y arroz. El saco de arroz vale 10 pesos más que el azúcar que vale 38 dólares. Si hubiera pagado el arroz al precio del azúcar y viceversa hubiera gastado 2250 dólares más ¿Cuántos sacos más de azúcar que de arroz compró?

Rta: Compró 225 sacos más de azúcar que de arroz

Problema 3: Tres grupos de científicos farmacéuticos. El departamento de innovación de una multinacional farmacéutica recibió una donación de 1360000 (un millón tres cientos sesenta mil) dólares para realizar investigaciones sobre un nuevo fármaco. El dinero se dividió entre 100 científicos de 3 grupos de investigación: A,B,C. Cada científico del grupo A recibió 20000 (veinte mil) dólares; cada científico del grupo B 8000 (ocho mil) dólares y cada una del C recibió 10000 (diez mil) dólares. Además, el grupo de investigación B recibió la quinta parte de los fondos del grupo A.¿ cuántos científicos hay en cada grupo?

Rta: En el grupo A hay 40 científicos, en el B hay 20, y en el C hay 40

Parte III: Actividades fuera de clase

Resolver los siguientes problemas usando el método chino para los sistemas de ecuaciones que de ellos se generan

Problema 1: Perros bien cuidados. Un departamento de alimentación canina suministra tres tipos de alimentos A, B y C a una perrera municipal que mantiene tres razas para competición. Cada perro de la raza 1 consume por semana, un promedio de una unidad del alimento A, una unidad del alimento B y seis unidades del alimento C. Cada Perro de la Raza 2, consume cada semana un promedio de tres unidades del alimento A, cuatro unidades del alimento B y una unidad del alimento C. Para un Perro de la Raza 3, el consumo semanal promedio es dos unidades del alimento A, una unidad del alimento B y cinco unidades del alimento C. Cada semana se proporcionan a la perrera 130 unidades del alimento A, 120 unidades del alimento B y 230 unidades del alimento C. Si se supone que todo el alimento es ingerido, ¿Cuántos perros de cada raza pueden coexistir en la perrera[23]?

Respuesta: En la perrera pueden coexistir 10 perros de la raza 1; 20 de la raza 2 y 30 de la raza 3

[23] Tomado de https://es.scribd.com/doc/298880637/ejercicios-programacion-lineal página 1 de 4

Problema 2: Pesos en libras de tres ejemplares de especies marinas.

Cangrejo Pulpo Caracol

En un tablero un pintor ha plasmado de modo muy hermoso el siguiente sistema de ecuaciones donde en su parte derecha se registra la suma de pesos (en libras) de distintas cantidades de tales animales:

= 14

= 12

= 13

= ? = ? = ? = ? = ?

Hay un premio especial para quien adivine exactamente los pesos (en libras) de cada uno de los anteriores animales y complete la última fila del tablero anterior ¿puedes tu ganarte ese premio especial?

Respuesta: Cangrejo = 1 ; pulpo = 5 ; caracol = 2

Capítulo 4: Proyecto de aula N° 3

Teorema de Pitágoras a nivel Chino

Nombre:	Teorema de Gougu (o de Pitágoras) a nivel chino
Profesión :	
Área:	
Objetivo:	Conocer la importancia del teorema de Pitágoras mediante una forma pedagógica que permita al estudiante un análisis visual y didáctico.
Transversalización	Matemática, Geometría, artística, Historia y Pedagogía
Valor y actitud:	Responsabilidad y Creatividad
Docente:	Jennifer Andrea Posada García
Asesor:	Julián Guzmán Baena

Recursos

- Guías
- Tablero
- Humano
- Regla
- Hojas o cartulina

Tiempo estimado: 3 horas

Nivel de escolaridad: Grado séptimo de educación básica

Evaluación

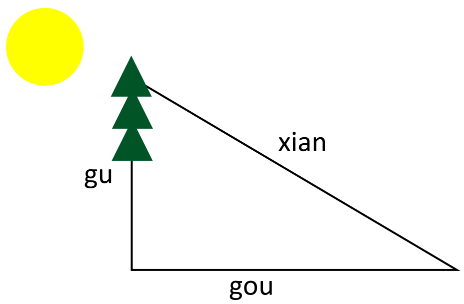
- Un 50% de trabajo en clase ya que es primordial el desarrollo de las guías para fortalecer y ver otros horizontes del conocimiento que se tiene.
- Un 20% de participación en el principio y el cierre de la actividad ya que se agruparan las conclusiones dadas en la guía y las observaciones que los estudiantes puedan brindar, además se realizara algunas preguntas de los datos dados.
- Un 30% de la entrega del trabajo finalizado con sus respectivas actividades.

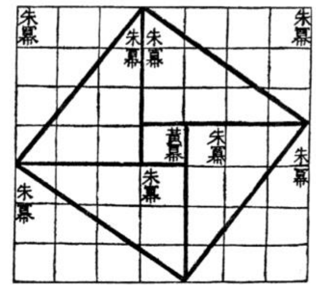
Comentario: Sin duda el teorema de Pitágoras ha sido uno de los más trabajados por diferentes matemáticos en distintas culturas. Los chinos, también, dieron sus aportes y algunos se mostrarán en este proyecto, de una forma visual donde el estudiante analizará la demostración gráfica y el significado geométrico que este implica. Además, les permitirá conocer autores chinos que hoy por hoy no son muy reconocidos por muchos de nosotros pero que presentaron contribuciones significativas.

Parte I: Marco teórico

Tiempo estimado: 2 horas

A. El teorema Gougou[24] en El zhou Bi Suan Jing o "La aritmética clásica del Gnomon **y las trayectorias circulares del Cielo".**





El Zhou Bi Suan Jing, es uno de los más antiguos textos matemáticos chinos y contiene una de las pruebas primero grabadas del teorema Gougu (Teorema de Pitágoras). Este libro data de la época de la Dinastía Zhou (1046 a.C.–256 aC), de ahí el término Zhou en su nombre; sin embargo, su recopilación y adición de materiales continuaron durante la dinastía Han (202 aC – 220 dC). Se trata de un libro de astronomía consistente de una colección anónima de 246 problemas encontrados por el duque Wen de Zhou [25] y su astrónomo y matemático, Shang Gao. Cada pregunta tiene su respuesta numérica y su correspondiente algoritmo [26].

B. Cuatro grandes matemáticos chinos en el teorema Gougu: Liu Hui **, Zu Chongzhi y su hijo** Zu Geng, Li Chunfeng **y** Yang Hui**.**

- Liu Hui (225 – 295 d.C): Vivió en el reino Wei durante el período de los tres reinos (Wei, Han y Wu, 220-280 d.C). En el año 263 editó y comentó el *Jiuzhang Suanshu* o "Los nueve capítulos del arte matemático". En sus comentarios:

1. Da lugar a la notación en base decimal junto con la introducción del punto decimal, como por ejemplo, $3,141 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000}$

2. Estima al número PI, π, en 3, 14159;

3. Plantea que el área de un círculo es la mitad de su circunferencia multiplicada por la mitad de su diámetro;

4. Analiza sistemas de ecuaciones lineales simultáneas;

[24] Gougu : Gou significa sombra y gu: varilla o palo colocado verticalmente. Gougu: sombra y varilla (sombra proyectada por un palo colocado verticalmente). Así en un triángulo rectángulo cuyos catetos están dispuestos en formas horizontal y vertical decimos que el cateto horizontal es **gou** y el cateto vertical es **gu** , en tanto que la hipotenusa se denomina **xian**. Este teorema permite, entre otras cosas, hallar la longitud de la vara (gu) conociendo su sombra (gou) en un momento del día.

[25] Su nombre es Dan. Y vivió en la segunda mitad del siglo XI a.C

[26] Para tener una mejor idea de este libro consultar el artículo "π en el antiguo imperio chino", de Iván Arribas, páginas 14 y 15. Al parecer el término Zhou hace referencia a la dinastía (en que el libro se escribió

Da muy buenas aplicaciones del th Gougu en su obra “El manual matemático de una isla en el mar”, uno de “los diez manuales matemáticos”. Estos diez manuales fueron utilizados como libros de texto oficial para el sistema de examen imperial chino en la dinastía Tang.

- **Zu Chongzhi (429 – 500) y su hijo** Zu Geng. Vivieron en la época de las dinastías Norte y Sur (420 – 581, más precisamente en la dinastía Song del sur). Entre sus aportes:

    1. Hallan la ***fórmula del volumen de la esfera***: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (para ello hacen uso del teorema Gougu);

    2. Aproximan al número π,

    $3,1415926 < \pi < 3,1415927$

- **Li Chunfeng (602 – 670)**. Vivió durante las dinastías Sui (581 - 618) y Tang (618 – 907). Junto con Liang Shu y Wang Zhenru escribieron y recopilaron “Los diez manuales matemáticos” [27], estos se componían de las obras siguientes [28] :

    1. Nueve capítulos sobre el arte matemático, Liu Hui en el reino Wei

    2. Clásico de la aritmética del gnomon y de las sendas circulares del cielo, dinastía Shou

    3. Manual matemático de la isla del mar, Liu Hui

    4. Manual matemático del maestro sun Zi[29] (400 – 460 d.C).Vivió en un periodo de división y guerra en China, luego reunificada por la dinastía Sui (581 – 618).

    A continuación 3 obras de ***Shen Luan*** (vivió en la época de los reinos Norte y Sur, 184 – 283, dinastía Wei)

    5. Cinco clásicos de aritmética

    6. Memorias de algunas tradiciones del arte matemático [30]

[27] Tomado de https://en.wikipedia.org/wiki/Li_Chunfeng.

[28] Tomado del trabajo “Las Matemáticas Chinas” de Maria Nieve Algarra, Isabel Garcia y Verónica Hernandez , trabajo realizado en el año 2004 y se halla en la dirección de internet http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf

[29] En esa obra aparecen problemas relacionados co el famoso ***“Teorema chino del residuo”***, posteriormente desarrollado de modo amplio en el año 1247 por el gran matemático chino ***Qin Jiushao*** (1202 - 1261) de la dinastía Song (960-1279).

7. Manual matemático de las cinco secciones del gobierno.

8. Manual matemático, de Xiahou Yang (400 – 470 d.C)

9. El manual matemático, de Zhang Qiujian (430 – 490 d.C)

10. Continuación de las matemáticas antiguas[31], de Wáng Xiantong (580 – 640 d.C, dinastías Sui 581 – 618 y Tang 618 – 907).

- **Yang Hui (1238 – 1298).** Vivió en el período de la dinastía Song (960-1279). Es el matemático de los cuadrados y círculos mágicos (círculos concéntricos y no concéntricos). Los trabajos de Yang son los primeros en que aparecen ecuaciones cuadráticas con coeficientes negativos, si bien se lo atribuye a su antecesor, el matemático Liu Yi. Entre sus obras tenemos tres fundamentales:

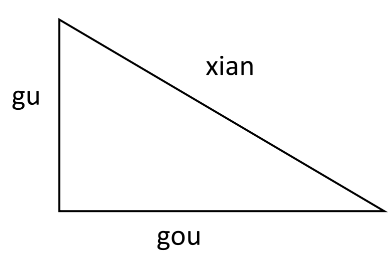
Análisis detallado de los métodos matemáticos de los nueve capítulos[32], 1261 d.C.

Métodos de cálculo para el uso diario, 1275 d.C.

Métodos de cálculo, 1275 d.C.

C. El teorema Gougu en la dinastía Han (206 a.C – 220 d.C).

Los primeros rastros escritos de este teorema en la cultura china se registran en el libro “El clásico de la aritmética del gnomon y las sendas circulares del cielo”, escrito alrededor del final del siglo II a.C durante la dinastía Han y síntesis de los resultados científicos obtenidos en las dinastías Shou y Qin (1040 – 221 a.C la primera, y 221 – 206 a.C la segunda)[33].



$$\text{xian}^2 = \text{gou}^2 + \text{gu}^2$$

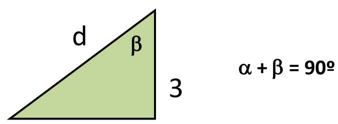
[30] En esa obra aparecen por primera vez un serio tratamiento de los ***cuadrados mágicos***, tratados con gran profundidad en el siglo XIII por el matemático Yang Hui.

[31] En ese trabajo su autor Wáng Xiantong trabaja polinomios de grado 3 y da un algoritmo para extraer las raíces cubicas de un número.

[32] En esta obra aparece el famoso triangulo de Pascal, descubierto por el matemático Jian Xian , en el siglo XI, seis siglos antes del mismo Pascal .

[33] Esta información aparece en la páginas 17 y 18 del trabajo “Las Matemáticas Chinas” de Maria Nieve Algarra, Isabel Garcia y Verónica Hernandez , trabajo realizado en el año 2004 y se halla en la dirección de internet http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf

En el antes mencionado libro no se da una demostración del resultado general, pero mediante diagramas ilustra el caso particular del triángulo rectángulo de catetos 4 (gou) y 3 (gu), muestra que la hipotenusa **d** (xian) resulta igual a 5.



Mediante la secuencia de las figuras ilustradas a continuación se logra tal resultado:

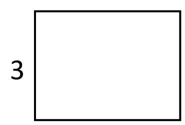


Fig. 1

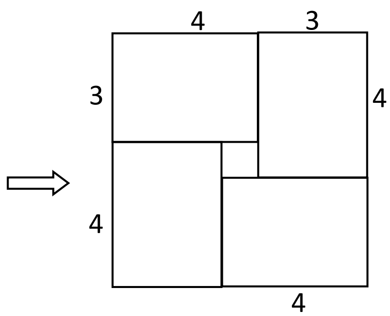


Fig. 2

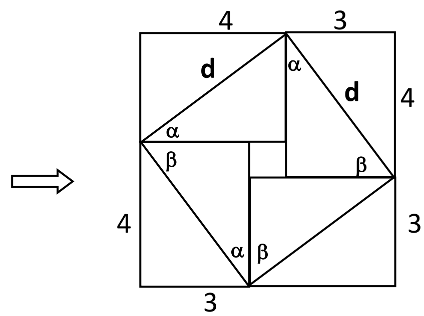


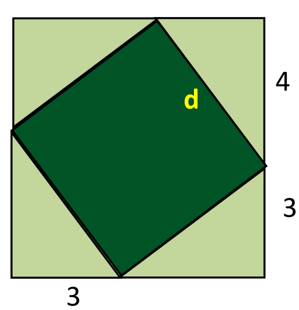
Fig. 3

Explicación del proceso y Conclusión

Paso 1. Se diseñan cuatro rectángulos iguales de largo 4 y ancho 3, y haciendo giros de 90º a la derecha se unen formando un cuadrado de lado 7 (área 49), Figura 2.

Paso 2. Trazando las diagonales de los rectángulos del cuadrado mayor se construye un cuadrado menor dentro del cuadrado mayor, tal como se muestra en la figura 3 (allí se traza la diagonal del rectángulo superior izquierdo y las otras se diseñan girando esta 90º a la derecha)

Paso 3 (conclusión). Seguidamente nos preguntamos por el valor d (diagonal del rectángulo) o lo mismo por el área de ese cuadrado interno. Se da la respuesta usando diferencia de áreas:



El cuadrado de lado d se obtiene suprimiéndole al cuadrado mayor (de lado 7) los cuatro triángulos rectángulos exteriores iguales (de catetos 3 y 4) que rodean tal cuadrado, o lo mismo,

$$d^2 = 7^2 - 4* \frac{3*4}{2} = (3 + 4)^2 - 2* (3 *4) = [3^2 + 4^2 + 2* (3 *4)] - 2* (3 *4) = 3^2 + 4^2$$

Así, $d^2 = 3^2 + 4^2$ (Th de Pitágoras para el triángulo de catetos 3 y 4)

Luego, $d^2 = 25$. De donde **d** = **5**

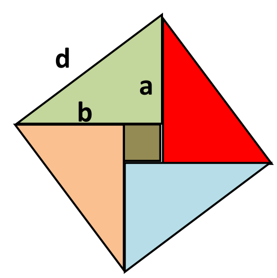
Comentario. Como el proceso anterior de los tres pasos se puede realizar para cualquier par de números a, b (ejemplos para a = 6, b = 9; o para a = 5.5 y b = 7.8, etc.) Puede darse de modo práctico la validez del th de Pitágoras:

$$\mathbf{d^2 = a^2 + b^2}$$

D. El teorema de Gougu en las dinastías Wei (184 – 283 d.C) y (265 a.C – 421 d.C).

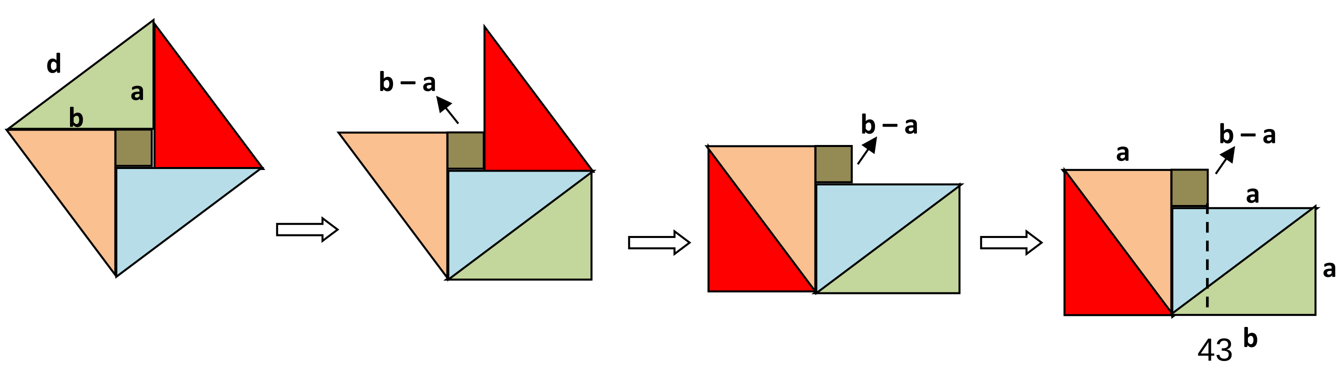
El proceso anterior nos garantiza algebraicamente que en un triángulo rectángulo el cuadrado de su hipotenusa es la suma de los cuadrados de sus catetos. Pero, ¿cómo construir geométricamente, a partir del cuadrado de la hipotenusa, los dos cuadrados cuyos lados son los catetos.

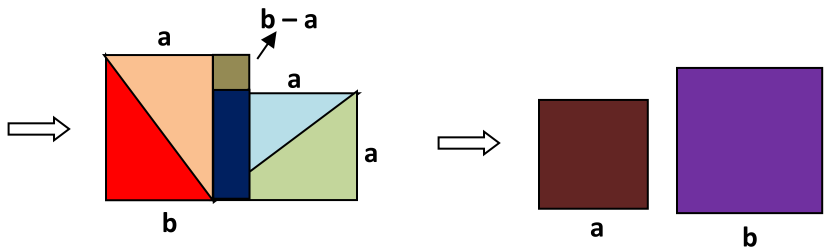
Esta pregunta es respondida acertadamente en la cultura china por el matemático ***Zhao Huang*** (en los años 270 aproximadamente) quien en uno de sus libros desarrolla veintiún teoremas sobre triángulos rectángulo y las relaciones entre sus lados. Allí hace un comentario del libro "El clásico de la aritmética del gnomon y las sendas circulares del cielo" y muestra cómo construir dos cuadrados de lados los catetos a partir del cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Veamos cómo lo hace:



Considera un rectángulo de lados a y b con diagonal d , y luego realiza los pasos explicados anteriormente para formar un cuadrado de lado d, conformado por cinco piezas: 4 triángulos rectángulos iguales de catetos a y b, y un cuadrado de lado b – a.

Haciendo movimientos de las piezas y la partición de uno de los triángulos como se indica más abajo llegamos a lo deseado:



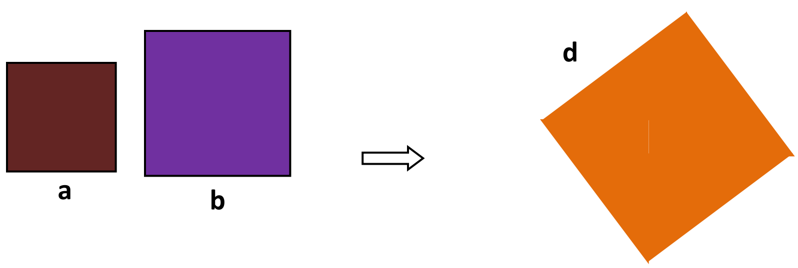


Parte II: Actividades en clase

Tiempo estimado: 1 hora

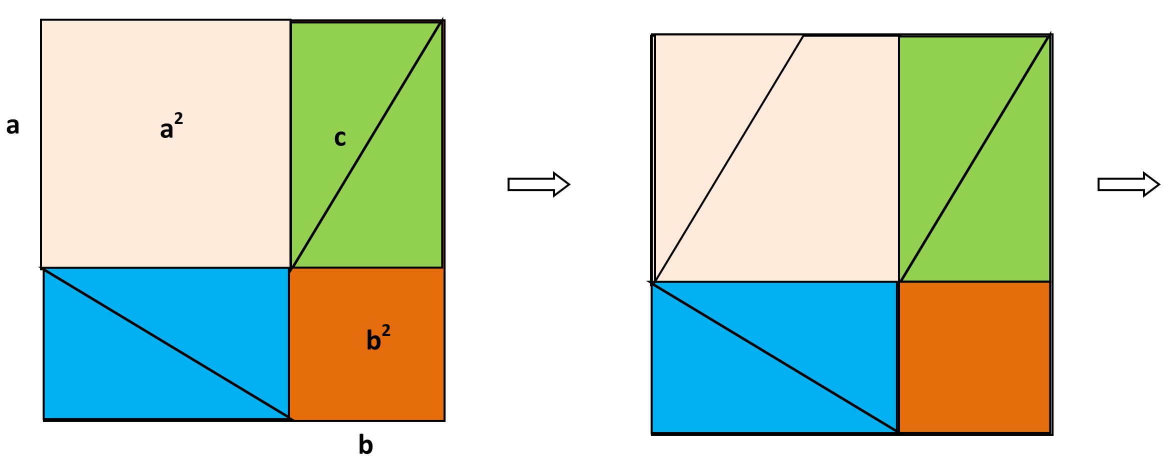
1. Usando papel, colores y tijeras realice el anterior proceso de Zhao Huang, es decir, obtenga dos cuadrados de lados a y b a partir de un cuadro de lado d, donde d es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos a y b. Las medidas a y b las escoge el estudiante a su gusto.

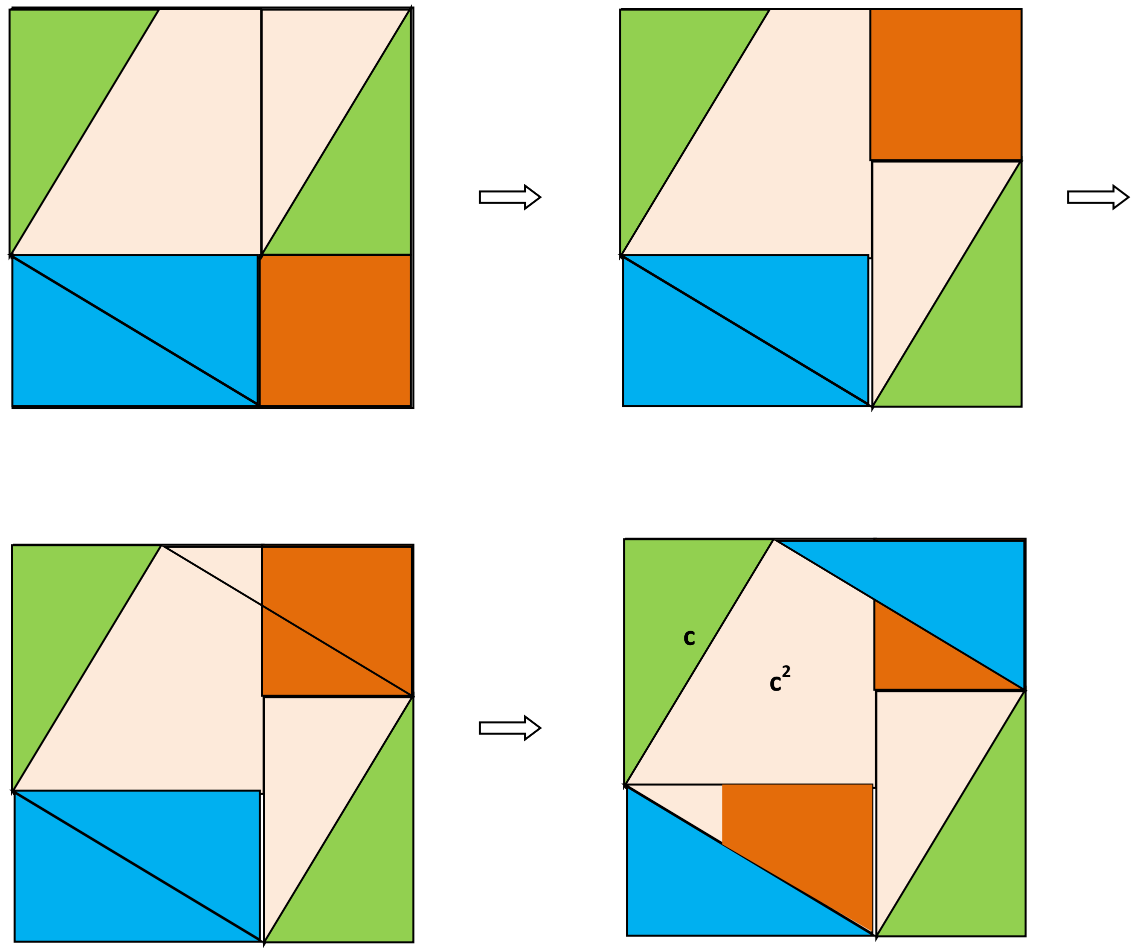
2. El recíproco de 1: Usando papel, colores y tijeras obtenga un cuadrado de lado d, a partir de dos cuadrados de lados a y b, donde d es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos a y b. Las medidas a y b las escoge el estudiante a su gusto.



Parte III. Actividad fuera de clase: **Otra demostración del teorema de Pitágoras.**

Usando cartulina o una hoja de papel, tijeras, colores y el proceso que abajo se describe comprobar que $a^2 + b^2 = c^2$




c
c2

Capítulo 5: Proyecto de aula N° 4

Los círculos mágicos más simples de Yang Hui.

Nombre:	Los círculos mágicos más simples de Yang Hui
Profesión:	
Área:	
Objetivo:	Desarrollar operaciones matemáticas aplicando lógica de una forma innovadora y llamativa.
Transversalización	Matemática, lógica, Historia y Pedagogía
Valor y actitud:	Flexibilidad y proactividad
Docente:	Jennifer Andrea Posada García
Asesor:	Julián Guzmán Baena

Recursos

- Guías
- Humano
- Hojas

Tiempo estimado: 1 ½ horas

Nivel de escolaridad: Grado séptimo de educación básica

Evaluación

- Un 50% de trabajo en clase ya que es primordial el desarrollo de las guías para fortalecer y ver otros horizontes del conocimiento que se tiene.
- Un 20% de participación en el principio y el cierre de la actividad ya que se agruparan las conclusiones dadas en la guía y las observaciones que los estudiantes puedan brindar, además se realizara algunas preguntas de los datos dados.
- Un 30% de la entrega del trabajo finalizado con sus respectivas actividades.

Comentario. Este proyecto junto con el siguiente (el cinco) inicialmente eran uno solo, pero en aras de claridad en su tratamiento didáctico y por sugerencia de los estudiantes se dividió en dos partes, cada una dando lugar a un proyecto. Tales proyectos dan a conocer lo innovador de los círculos chinos, donde se permite que el estudiante realice operaciones aritméticas de una forma diferente y llamativa para él. Por otra parte, se busca que el estudiante evidencie las diferentes formas que existen al solucionar algún determinado problema y optimice al máximo el tiempo que se emplea en dicha solución.

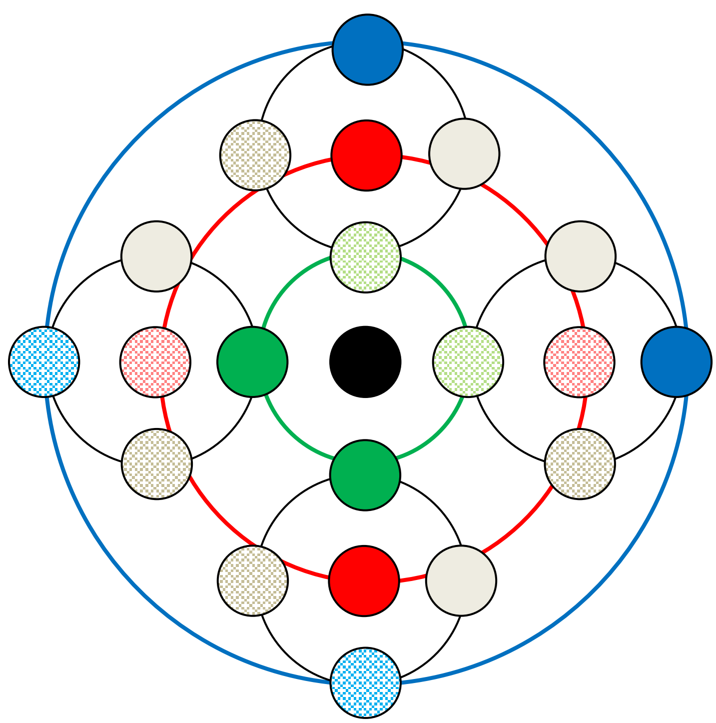
Parte I: Marco teórico

Tiempo estimado: 1/2 hora

A. Círculos mágicos por Yang Hui. Los resultados que acá y en el próximo proyecto se dan a conocer son del matemático chino Yang Hui, de la Dinastía Song (960-1279), en el siglo XIII.. Alrededor de 1275 d.C., aparecen dos de sus trabajos: El ***Xugu Zhaiqi Suanfa (Métodos del calculo para la vida practica)*** y ***Suanfa Tongbian Benmo (Métodos del calculo para descubrir propiedades de los números)***, los cuales se publican ese mismo año en su gran obra ***Yang Hui suan fa (Métodos de cálculo de Yang Hui)***. En este libro Yang trata temas como: la multiplicación, la división, la extracción de raíces cuadradas, solución de sistemas de ecuaciones lineales, series, cálculos de áreas (de rectángulos, trapecios y otras figuras). Además, trata arreglos de números naturales en círculos concéntricos y sobre diagramas verticales-horizontales de arreglos complejos combinatorios (conocidos posteriormente como y cuadrados mágicos).

Los **círculos mágicos** consisten en una serie de números naturales colocados en círculos, según el caso en disposiciones concéntricas o cuadradas, donde la suma de los números de cada diámetro y de cada círculo (o cada lado y diagonal en formaciones cuadradas), incluido el centro si lo hay, es idéntica. Dentro del tratamiento de estos círculos están:

B. Los círculos mágicos más simples de Yang Hui [34] (El maravilloso 65).



[34] Un círculo mágico similar a éste aparece en el artículo "Yang Hui", de *O'Connor* y *Robertson (2003)* y se halla en http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yang_Hui.html. Se ha reformado un poco el original para que el estudiante pueda realizar la actividad sin necesidad de copiarlo tal como es de una vez.

B_1. Estructura de la figura. En la anterior figura se distinguen siete círculos fundamentales:

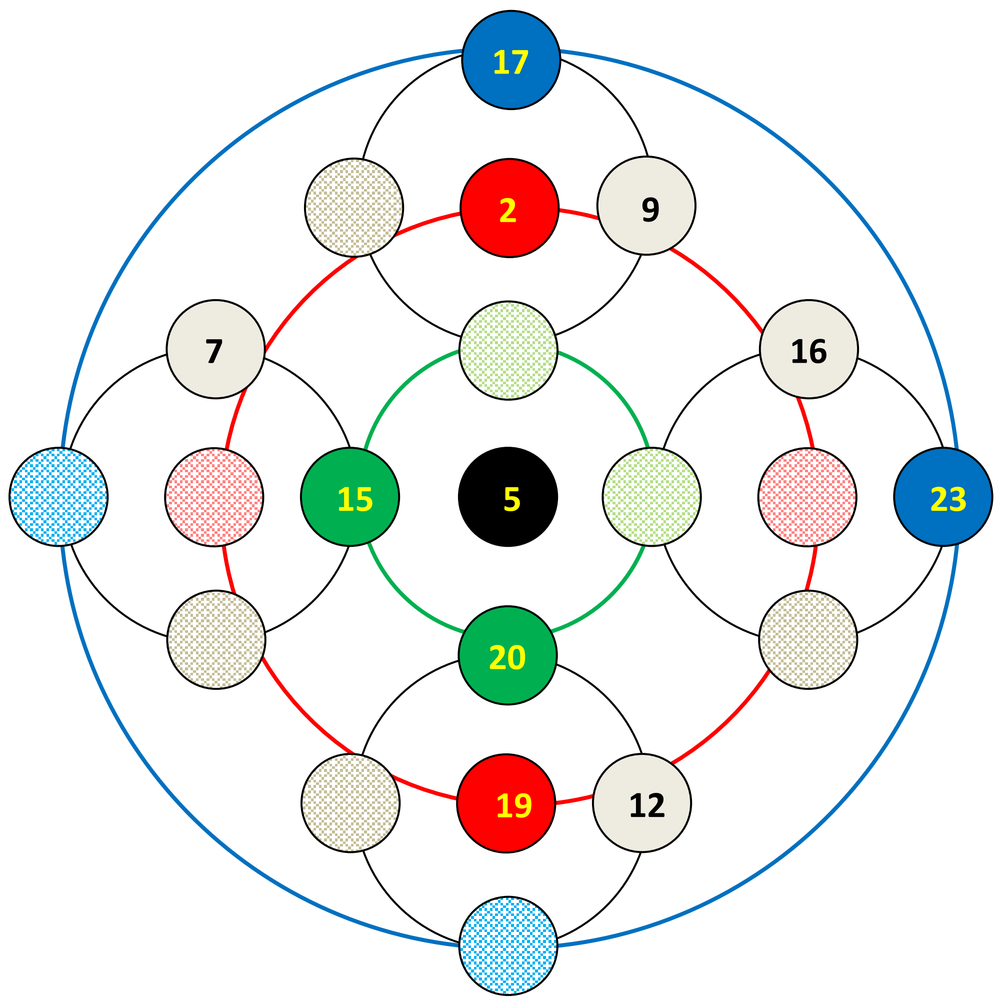
- Tres con el mismo centro negro (de circunferencias azul, rojo y verde) ; y
- Cuatro círculos cardinales en las posiciones Norte, Este, Sur y Oeste. Todos ellos iguales al círculo más interno (de circunferencia verde) y tangentes a los círculos mayor y menor (de circunferencias azul y verde). De ese modo cada uno de los círculos de centro negro se intercepta exactamente con los cuatro círculos cardinales; y cada uno de los círculos cardinales se intercepta exactamente con los 3 círculos concéntricos.
- En cada uno de los círculos se observan cinco pequeños círculos (para ubicar números naturales), cuatro en sus circunferencias y uno central. Total hay 21 círculos pequeños.

B_2. Resultado de Yang Hui: El maravilloso 65. Este matemático ubica en esa estructura 21 números naturales del 1 al 24 **exceptuando el 3, 10 y 22**, de modo tal que los números ubicados en cada uno de los siete círculos sumados con su centro da el número 65.

Parte II: Actividades en clase

Tiempo estimado: 1 hora

Completar la figura siguiente con números naturales del 1 al 24, distintos del 3, 10 y 22, de tal modo que cada uno de los sietes círculos junto con su centro sumen 65.

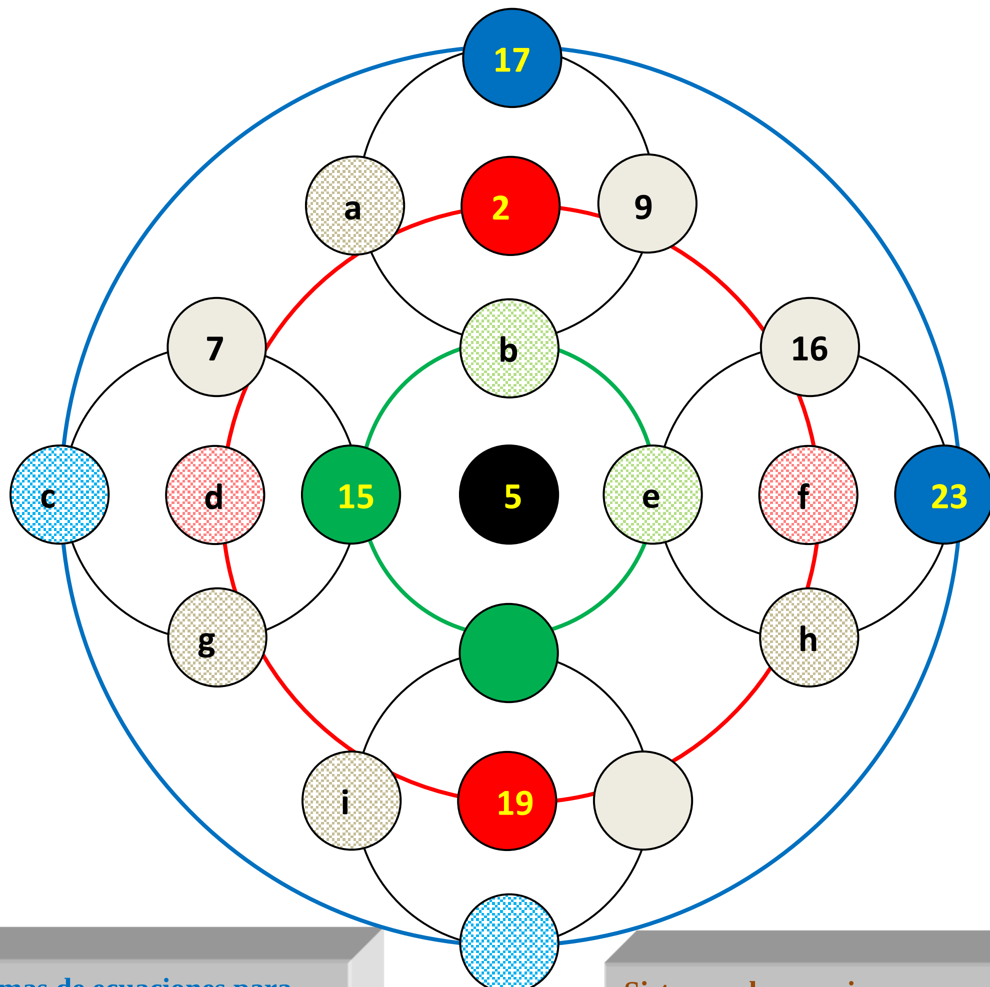


Pistas

1. Son números naturales los que usted debe usar, entre 1 y 24, pero No puede usar ni el 3, ni el 10 y tampoco el 22.

2. Los círculos concéntricos suman 65 y los círculos pequeños junto con el centro én suman 65

3. Estructura algebraica asociada a la figura



Sistemas de ecuaciones para los círculos de centro 5

c + j = 20

d + f = 39

b + e = 25

Sistemas de ecuaciones para los círculos cardinales

a + b = 37

e + h + f = 26

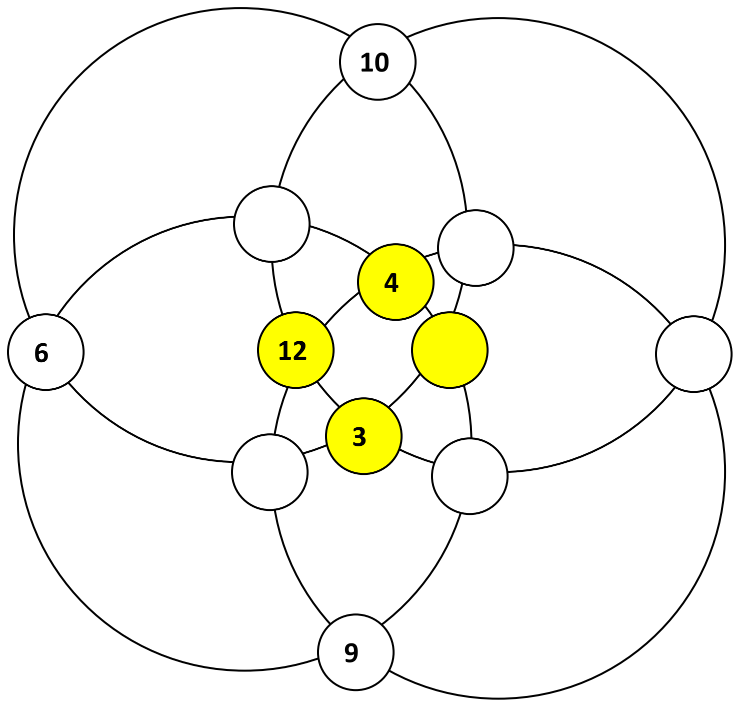
i + j = 14

c + g + d = 43

Parte III del proyecto: **Actividades fuera de clase.**

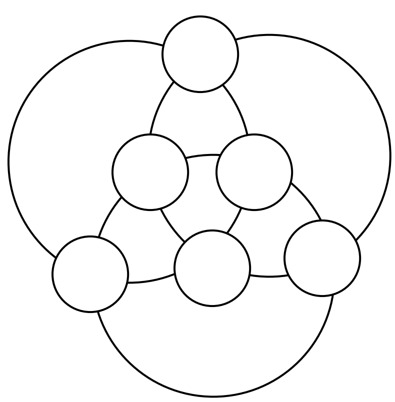
1. Resolver los círculos mágicos de la figura de abajo, de acuerdo a las siguientes reglas:

- Los números a utilizar son del 1 al 12.
- Cada circulo suma 39 (son 4 círculos)
- Los 4 puntos del centro suman 26



2. Resolver los círculos mágicos de la figura de abajo, de acuerdo a las siguientes reglas:

- Los numeros a utiliar son del 1 al 6
- Cada circulo suma 14



Capítulo 6: Proyecto de aula Nº 5

Los Cuatro Círculos Concéntricos de Yang Hui.

Nombre:	Los Cuatro Círculos Concéntricos de Yang Hui
Profesión:	
Área:	
Objetivo:	Desarrollar operaciones matemáticas aplicando lógica de una forma innovadora y llamativa.
Transversalización	Matemática, lógica, Historia y Pedagogía
Valor y actitud:	Flexibilidad y proactividad
Docente:	Jennifer Andrea Posada García
Asesor:	Julián Guzmán Baena

Recursos

- Guías
- Humano
- Hojas

Tiempo estimado: 1 ½ horas

Nivel de escolaridad: Grado séptimo de educación básica

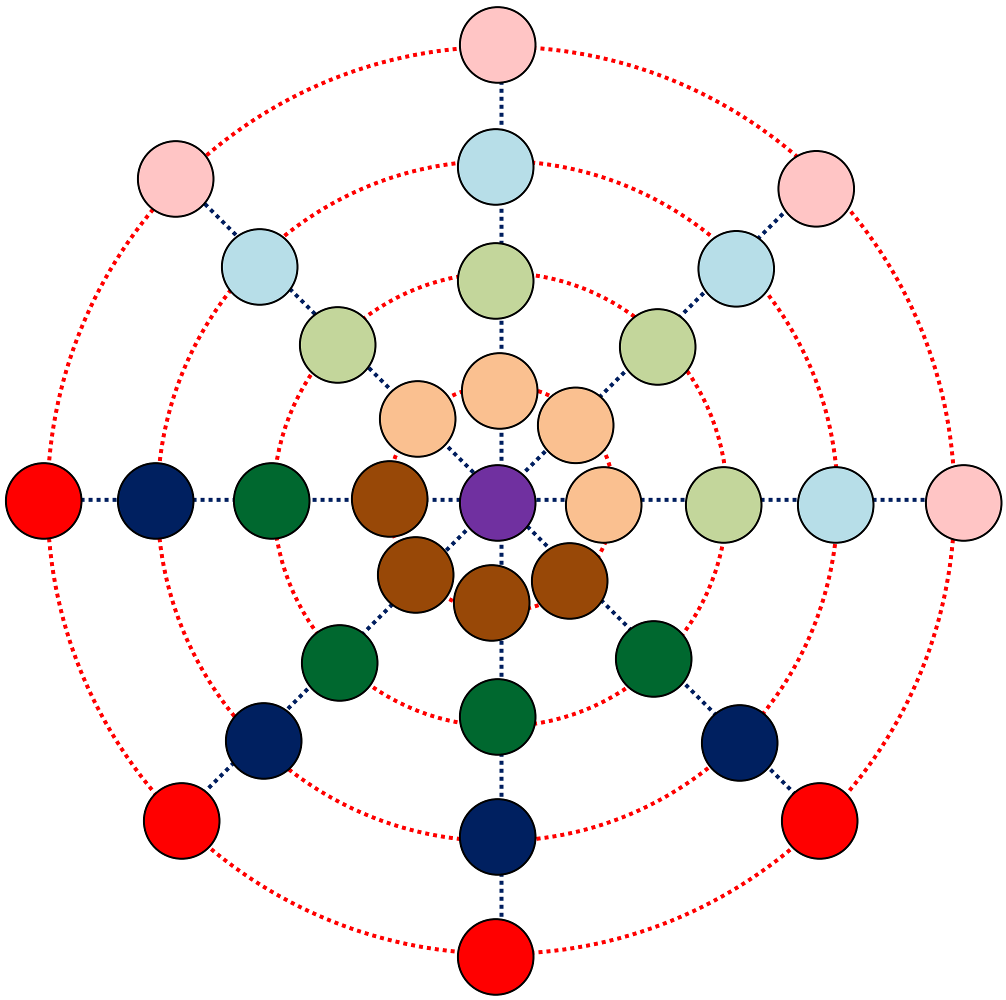
Evaluación

- Un 50% de trabajo en clase ya que es primordial el desarrollo de las guías para fortalecer y ver otros horizontes del conocimiento que se tiene.
- Un 20% de participación en el principio y el cierre de la actividad ya que se agruparan las conclusiones dadas en la guía y las observaciones que los estudiantes puedan brindar, además se realizara algunas preguntas de los datos dados.
- Un 30% de la entrega del trabajo finalizado con sus respectivas actividades.

Parte I: Marco teórico

Tiempo estimado: 1/2 hora

A. Los Cuatro Círculos Concéntricos de Yang Hui



A_1. Estructura de la figura.

- Son ocho radios: Cada radio consta de cinco pequeños círculos (para ubicar los números naturales del 1 al 33)

- Hay cuatro circunferencias de centro 9, c/u consta de ocho pequeños círculos

- Hay ocho semicircunferencias, c/u consta de cuatro círculos del mismo color (rojo, rosado, azul oscuro, azul claro, verde oscuro, verde claro, café oscuro y café claro)

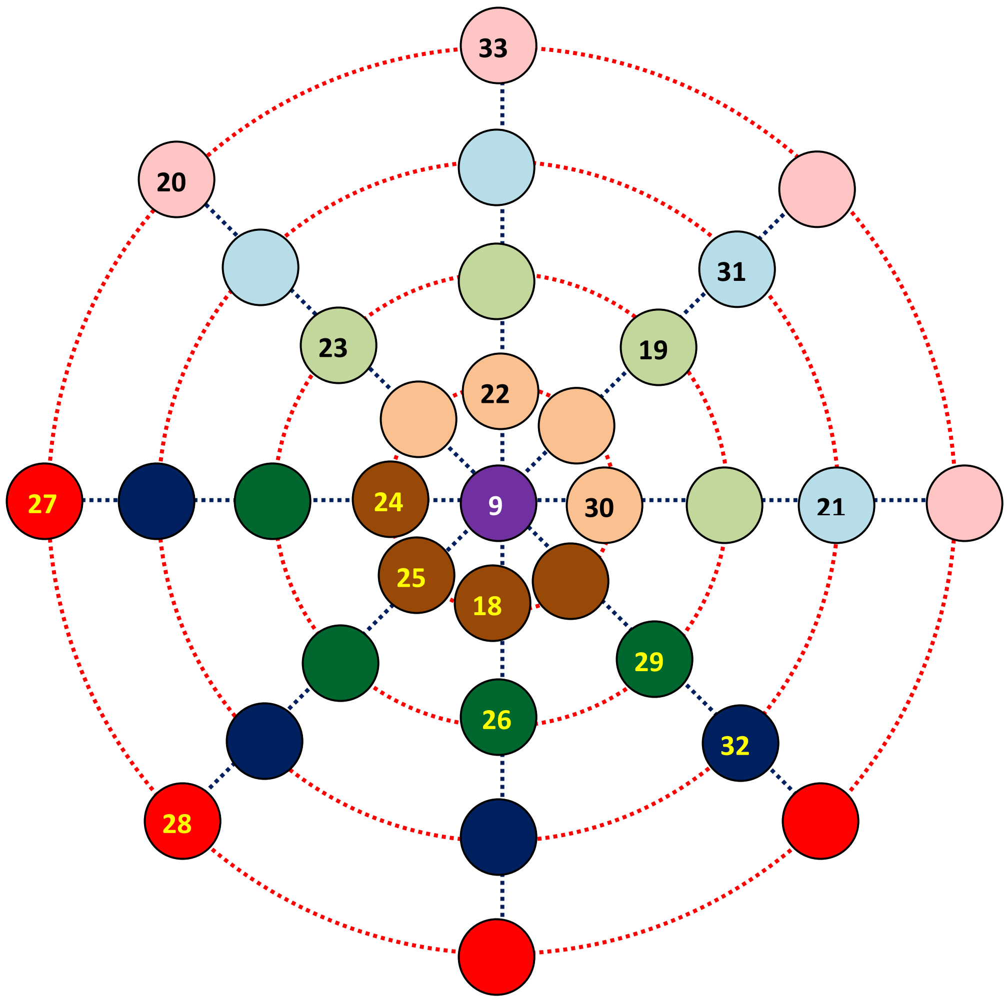
A_2. Resultado de Yang Hui: El maravillo 69. Yang ubica en esa estructura los números naturales del 1 al 33 de modo tal que los números ubicados en cada uno de los radios menos el centro suman 69, y cada una de las semicircunferencias coloreadas señaladas en (3) también suman 69.

Parte II: Actividades en clase

Tiempo estimado: 1 hora

En la figura de abajo colocar números naturales del 1 al 33 satisfaciendo las condiciones siguientes:

1. Los números de cada radio menos el centro suman **69**
2. Las semicircunferencias del mismo color suman siempre **69**



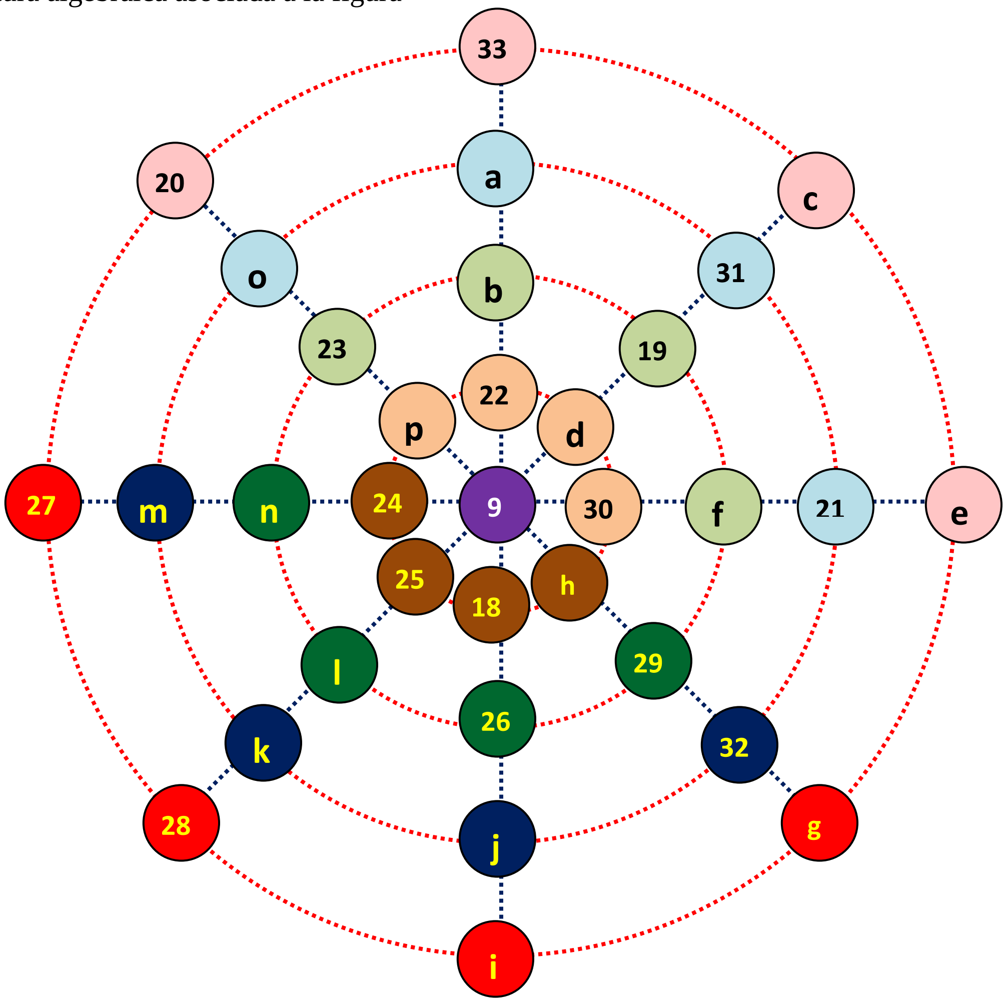
Pistas

1. Son números naturales los que usted debe usar, entre 1 y 33.

2. Los números de c/u de los radios menos el 9 suman 69.

3. Las semicircunferencias suman 69 (semicircunferencias de color rojo, rosado, azul oscuro, azul claro, verde oscuro, verde claro, café oscuro y café claro)

4. Estructura algebraica asociada a la figura [35]



Semicírculos

27 + 28 + i + g	=	69
e + c + 33 + 20	=	69
m + k + j + 32	=	69
21 + 31 + a + o	=	69
n + l + 26 + 29	=	69
f + 19 + b + 23	=	69
24 + 25 + 18 + h	=	69
30 + d + 22 + p	=	69

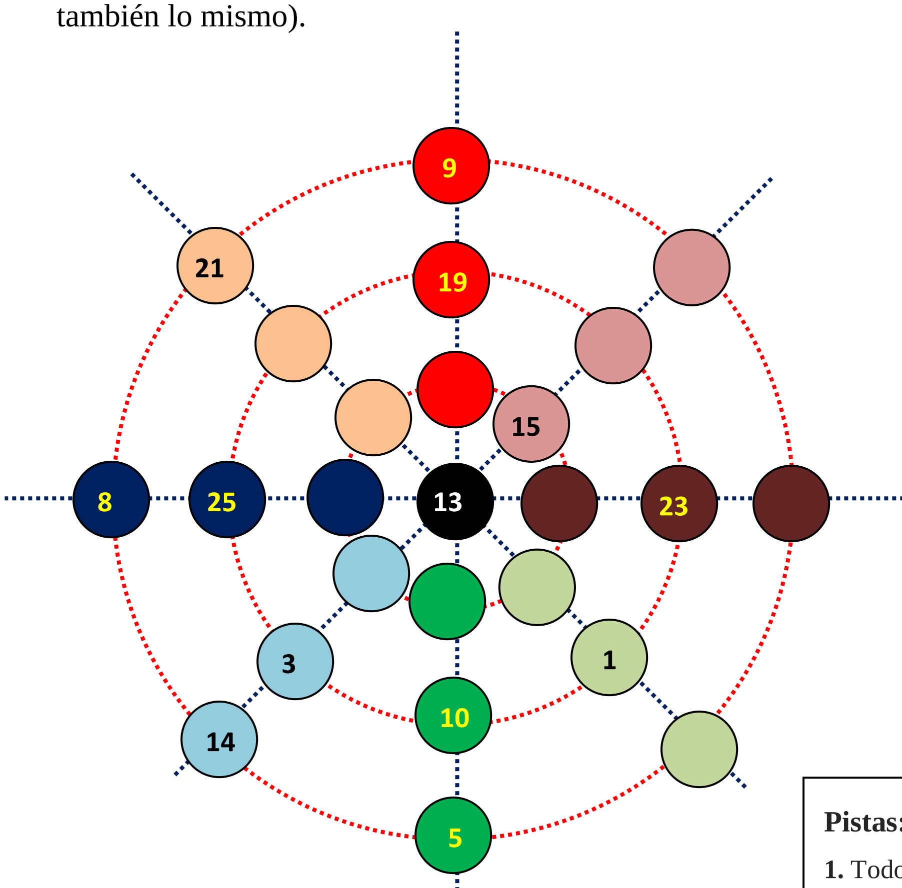
Radios

27 + m + n + 24	=	69
28 + k + l + 25	=	69
i + j + 26 + 18	=	69
g + 32 + 29 + h	=	69
e + 21 + f + 30	=	69
c + 31 + 19 + d	=	69
33 + a + b + 22	=	69
20 + o + 23 + p	=	69

[35] Las ecuaciones lineales que acá se dan no hay necesidad de resolverlas, solo indican lo que usted inicialmente por ensayo y error debes encontrar.

Parte III del proyecto: Actividades fuera de clase.

Colocar los números faltantes (del 1 al 25) de tal modo que los siguientes círculos sean mágicos (la suma de los radios debe ser la misma y los círculos concéntricos deben sumar también lo mismo).



Pistas:

1. Todo radio consta de cuatro círculos.

2. Cada radio menos el punto central suma 39

3. Cada circulo concéntrico suma 104

Capítulo 7:Proyecto de aula N° 6

La suma general de los números naturales en la China

Nombre:	La suma general de los números naturales en la China
Profesión:	
Área:	
Objetivo:	Descubrir la fórmula para la suma de números naturales consecutivos a partir del número 1.
Transversalización	Aritmética, Geometría, Lógica, Historia y Pedagogía
Valor y actitud:	Flexibilidad, solidaridad, responsabilidad y proactividad
Docente:	Jennifer Andrea Posada García
Asesor:	Julián Guzmán Baena

Recursos

- Guías
- Humano
- Hojas

Tiempo estimado: 3 horas

Nivel de escolaridad: Grado Décimo de educación básica

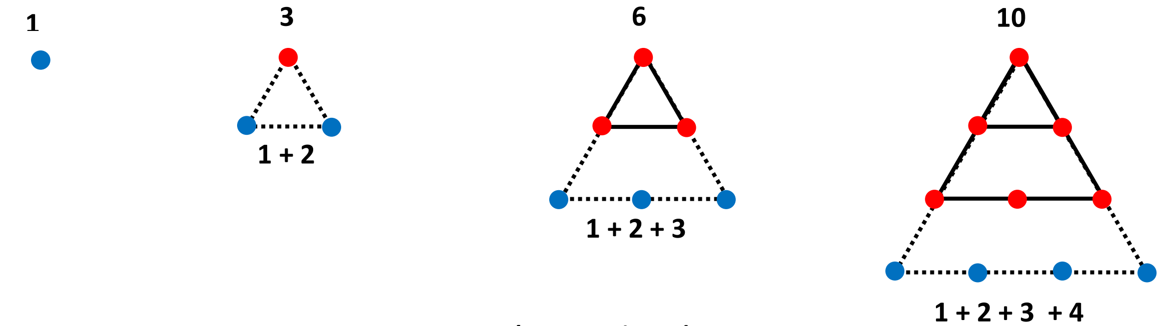
Evaluación

- Un 50% de trabajo en clase ya que es primordial el desarrollo de las guías para fortalecer y ver otros horizontes del conocimiento que se tiene.
- Un 20% de participación en el principio y el cierre de la actividad ya que se agruparan las conclusiones dadas en la guía y las observaciones que los estudiantes puedan brindar, además se realizara algunas preguntas de los datos dados.
- Un 30% de la entrega del trabajo finalizado con sus respectivas actividades.

Parte I: Marco teórico

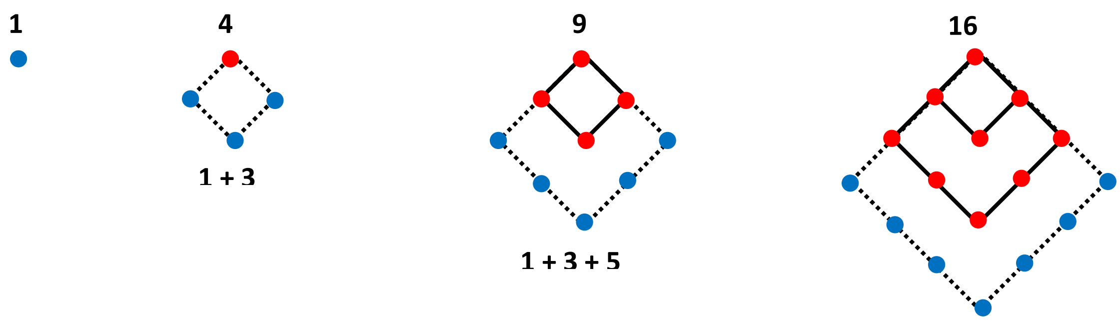
Tiempo estimado: 2 horas

A. Breve historia sobre las progresiones aritméticas y sus sumas.



Números Triangulares

Al tratar la suma de los primeros números naturales, y en general las progresiones aritméticas y sus sumas, es necesario plantear que esos objetos no son propiedad exclusiva del pueblo chino. Los pitagóricos, siglo VI a.C, en sus números poligonales (triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.), nos dan una muy buena demostración del elevado conocimiento que ellos poseían de tales conceptos matemáticos.

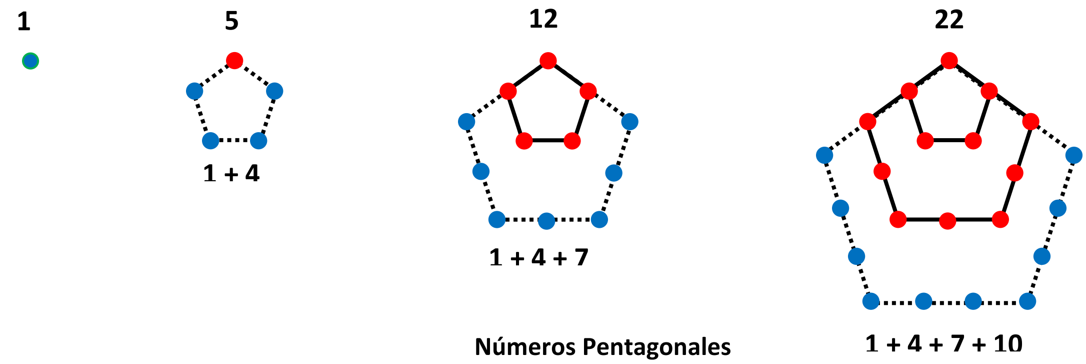


Números Cuadrados

Entre los siglos I y II d.C las progresiones aritméticas y sus sumas son formalizadas por el matemático neopitagórico Nicómaco de Gerasa (Jordania; 60 d.C – 120), en su tratado **"Introducción a la Aritmética" (100 d.C)** [36]. Es el primer trabajo en donde *se trata la Aritmética de forma separada a la Geometría*. En él, Nicómaco estudia los números y sus propiedades tanto metafísicas (cualidad, cantidad, forma, tamaño, etc.) como matemáticas

[36] Tomado de wikipedia https://es.wikipedia.org/wiki/Nic%C3%B3maco_de_Gerasa

(define los números pares e impares, los primos y los compuestos, los números perfectos y los números amigables[37]). Contrariamente a Euclides, Nicómaco no ofrece demostraciones abstractas de sus teoremas, sino que se limita a enunciarlos e ilustrarlos con ayuda de ejemplos numéricos. Muchos de los resultados descritos en la Introducción habían sido enunciados anteriormente por Euclides, pero de forma geométrica.



Números Pentagonales

No obstante la magnitud de los griegos en esos temas sería absurdo afirmar que todo ello es exclusividad de los griegos; estos desarrollos aritméticos son conocidos de modo independiente en las culturas babilónica (tablas cuneiformes) y egipcia (papiro de Rhind), varios siglos antes de nuestra era.

Por último, en el trabajo chino de sumatorias de la matemática china, tema central de estas páginas, debemos tener presente tres de sus matemáticos en las dinastías Song (960-1279) y Yuán (1279 - 1368). Estamos hablando de Shen Kuo (1031 – 1095; “El científico más grande de la China”) , Yang Hui (1238 – 1298) y Zhu Shijie (1270 – 1330) [38]. De modo muy rápido podemos decir que ellos trabajaron en series de igual diferencia entre sus sumandos consecutivos; brindando resultados fabulosos en las series de igual diferencia de altos órdenes[39], parte de ellas las exhibiremos en esta conferencia.

B. Una verdadera hazaña del Gauss Infantil. Al tratar la suma de los primeros n números naturales, más a nivel escolar, no podemos olvidar una fascinante historia del prodigioso Carl

[37] • Un **número perfecto** es un número natural que es igual a la suma de sus divisores propios positivos (≠ del número). Ejemplos, 6, 496, 8128.

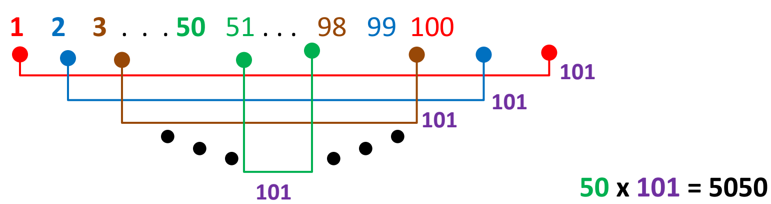
• Dos **números amigos** son dos números enteros positivos *a* y *b* tales que la suma de los divisores propios (≠ del número) de uno es igual al otro número. Ejemplos, (220, 284) y (1184, 1210) son parejas de números amigables

[38] Para completar mejor la información consultar el trabajo “Las matemáticas chinas” de Maria Nieves, Isabel Garcia y otros, paginas 46 – 49, que se encuentra en http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf

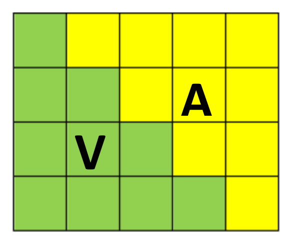
[39] El orden de una serie es el número de veces que se deben realizar las diferencias entre los términos de la serie hasta que las diferencias sean constantes. Ejemplo, para la serie 1, 4, 9, 16,…., su orden es 2: Primeras diferencias: 4–1 , 9–4, 16–9, … o lo mismo, 3, 5, 7, . . . ; Segundas diferencias: 5–3, 7–5, 9–7, …, o lo mismo, 2, 2, 2, …. Así orden de la serie es 2

Friedrich Gauss descrita por Antonio Pérez Sanz en su artículo “Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)” [40]:

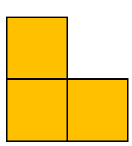
> “A los nueve años Gauss asiste a su primera clase de Aritmética. Büttner su profesor propone a su centenar de pupilos un problema terrible: calcular la suma de los cien primeros números. Nada más terminar de proponer el problema, el jovencito Gauss traza un número en su pizarrín y lo deposita en la mesa del maestro exclamando: ***“Ligget se!”*** (¡Ahí está!). Había escrito 5.050. La respuesta correcta.
>
> Ante los ojos atónitos de Büttner y del resto de sus compañeros, Gauss había aplicado, por supuesto sin saberlo, el algoritmo de la suma de los términos de una progresión aritmética. Se había dado cuenta de que la suma de la primera y la última cifra daba el mismo resultado que la suma de la segunda y la penúltima, etc., es decir: 1+ 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 101
>
> Como hay 50 parejas de números de esta forma el resultado se obtendrá multiplicando 101 . 50 = 5.050”

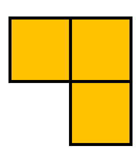


C. Motivación Geométrica para la suma de los números naturales consecutivos a partir de 1. Inicialmente presentamos casos particulares de un proceso que permite al estudiante descubrir la fórmula. Esperamos que el estudiante solo viendo las figuras y sus colores pueda aceptar lo que debajo de ellas se va afirmando, y luego pueda él mismo llegar a obtener la fórmula deseada.

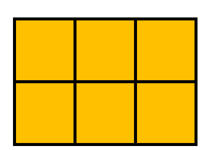


- **n = 2**





Las dos figuras coloreadas de arriba (en forma de escalera) tienen la misma área: la cantidad de cuadros por filas (o columnas) es la misma en ambas figuras ; Tal área es **1 + 2** . Además al unirlas forman un



[40] Este artículo aparece en http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/html/sigloxix/Carl%20Friedrich%20Gauss.htm

rectángulo cuyas medidas son: **2** de alto y **2 + 1** de ancho. Tenemos así:

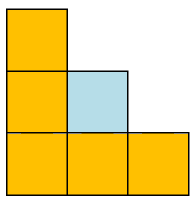
$$2(\mathbf{1} + \mathbf{2}) = \mathbf{2} * (\mathbf{2} + \mathbf{1})$$

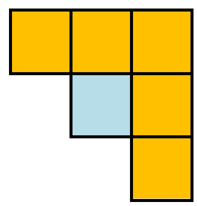
Luego,

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} = \frac{\mathbf{2}\,(\mathbf{2}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$$

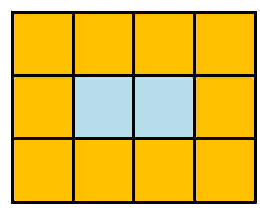
- **n = 3.**

A las figuras del caso anterior les aumentamos una fila y una columna como se indica a continuación





Las dos figuras coloreadas de arriba (en forma de escalera) tienen la misma área: la cantidad de cuadros por filas (o columnas) es la misma en ambas figuras ; Tal área es **1 + 2 + 3** . Además al unirlas forman un rectángulo cuyas medidas son: **3** de alto y **3 + 1** de ancho. Tenemos así:

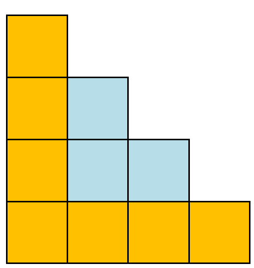


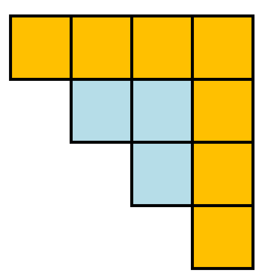
$$2\,(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}) = \mathbf{3} * (\mathbf{3} + \mathbf{1})$$

Luego,

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} = \frac{\mathbf{3}\,(\mathbf{3}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$$

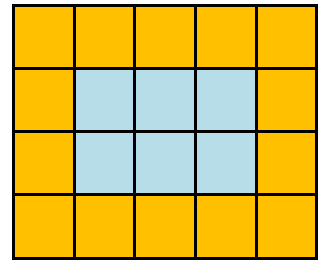
- **n = 4.** A las figuras del caso anterior les aumentamos una fila y una columna como se indica a continuación





Las dos figuras coloreadas de arriba (en forma de escalera) tienen la misma área: la cantidad de cuadros por filas (o columnas) es la misma en ambas figuras ; Tal área es

1 + 2 + 3 + 4 . Además al unirlas forman un rectángulo cuyas medidas son: **4** de alto y **4 + 1** de ancho. Tenemos así:

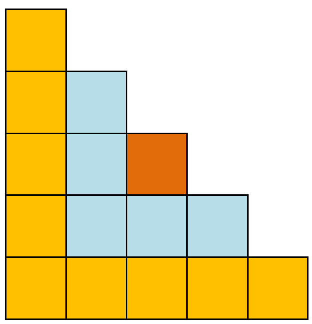


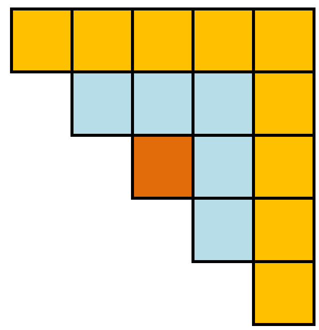
$$2(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4}) = \mathbf{4} * (\mathbf{4} + \mathbf{1})$$

Luego,

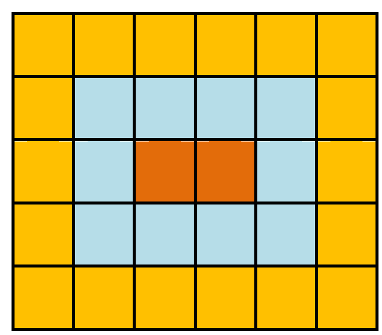
$$\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4} = \frac{\mathbf{4}\,(\mathbf{4}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$$

- **n = 5.** A las figuras del caso anterior les aumentamos una fila y una columna como se indica a continuación





Las dos figuras coloreadas de arriba (en forma de escalera) tienen la misma área: la cantidad de cuadros por filas (o columnas) es la misma en ambas figuras; Tal área es **1 + 2 + 3 + 4 + 5**. Además al unirlas forman un rectángulo cuyas medidas son: **5** de alto y **5 + 1** de ancho. Tenemos así:



$$2(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4} + \mathbf{5}) = \mathbf{5} * (\mathbf{5} + \mathbf{1})$$

Luego,

$$\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4} + \mathbf{5} = \frac{\mathbf{5}\,(\mathbf{5}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$$

Sintetizando

- $\mathbf{1} + \mathbf{2} = \dfrac{\mathbf{2}\,(\mathbf{2}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$
- $\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} = \dfrac{\mathbf{3}\,(\mathbf{3}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$
- $\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{4} = \dfrac{\mathbf{4}\,(\mathbf{4}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$

Parte II: Actividades en clase

Tiempo estimado: 1 hora

1. Usando el cuadro de abajo, para colorear adecuadamente, junto con el proceso geométrico y aritmético antes tratado comprobar que:

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6\,(6+1)}{2}}$$

2. Sin usar previamente la calculadora usted deberá hallar el miembro derecho de la fórmula correspondiente a la suma de los cuadrados allí dados

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 =} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Compruebe con calculadora la igualdad por usted encontrada

3. Generalizando el proceso:

a. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots + n =$ ____________________

b. Usando las operaciones del caso compruebe que la en (a) suma da un polinomio de grado 2 en la variable n; Y precise los valores A y B tales que

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = An^2 + B\,n}$$

4. Usando la fórmula obtenida en 4.3 calcular las siguientes sumas:

a. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8

b. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11

Parte III del proyecto: Actividades fuera de clase: *Suma de números naturales usando ecuaciones lineales.*

De las actividades de clase sabemos que la suma de los números naturales consecutivos es un polinomio de grado 2 en la variable n [41] :

[41] Existe otra forma de saber el grado del polinomio como es mediante los órdenes de una serie partiendo de los términos de las sumas parciales de los naturales consecutivos iniciando en 0:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = \mathbf{p(n)} = \mathbf{An^2 + Bn + C}$$

Considerando n = 0, 1, 2 se llega al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A + B = 1}$$

¿ por qué? (justifíquelo usted , esto hace parte de la actividad)

Usando la calculadora virtual que aparece en https://matrixcalc.org/es/ para resolver este sistema se obtiene:

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ **¿por qué?** □

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Sumas parciales de naturales:	**0**	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**
1ª : Diferencias de los de la fila anterior		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2ª : Diferencias de los de la fila anterior			**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Como son **dos** niveles (indicados por las flechas pequeñas) que se deben tratar a partir de las sumas parciales hasta llegar a una diferencia constante (1) en la última fila, puede probarse aunque acá no lo hacemos que la forma general asociado a los términos de la fila inicial (sumas parciales de naturales) es un polinomio de grado **2** en la variable n.

Capítulo 8: Proyecto de aula N° 7

Suma general de los cuadrados de los números naturales en la China

Nombre:	Suma general de los cuadrados de los números naturales en la China
Profesión:	
Área:	
Objetivo:	Descubrir la fórmula para la suma de los cuadrados de los números naturales consecutivos a partir del número 1.
Transversalización	Aritmética, Geometría, Lógica, Historia y Pedagogía
Valor y actitud:	Flexibilidad, solidaridad, responsabilidad y proactividad
Docente:	Jennifer Andrea Posada García
Asesor:	Julián Guzmán Baena

Recursos

- Guías
- Humano
- Hojas

Tiempo estimado: 3 horas

Nivel de escolaridad: Grado Décimo de educación básica

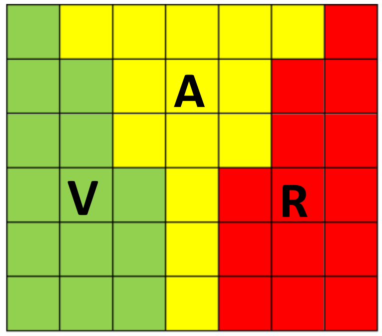
Evaluación

- Un 50% de trabajo en clase ya que es primordial el desarrollo de las guías para fortalecer y ver otros horizontes del conocimiento que se tiene.
- Un 20% de participación en el principio y el cierre de la actividad ya que se agruparan las conclusiones dadas en la guía y las observaciones que los estudiantes puedan brindar, además se realizara algunas preguntas de los datos dados.
- Un 30% de la entrega del trabajo finalizado con sus respectivas actividades.

Parte I: Marco teórico

Tiempo estimado: 1 1/2 hora

A. Inquietud inicial.



¿Qué relación hay entre las áreas de las figuras V, A y R ?

Comentario: La pregunta y su respuesta fueron formuladas por Martin Gardner ((Tulsa, Oklahoma, 1914 – Norman, Oklahoma, 2010) en su artículo “Deducción por inducción” [42]. Trabajar esta inquietud permite brindar un modelo geométrico adecuado para la suma de cuadrados de números naturales consecutivos, como bien veremos en esta conferencia, y correspondiente al espíritu geométrico de griegos y chinos lleno de transformaciones de figuras en otras, simetrías y juegos de gnomon (sustracción de un cuadrado de otro mayor).

B. Shen Kuo y la suma de cuadrados de enteros positivos consecutivos. Shen Kuo (1031, Hangzhou-1095, Zhenjiang) [43]. Físico, geólogo, astrónomo, agrónomo, embajador, general militar, matemático, cartógrafo, ingeniero hidráulico, meteorólogo, botánico, zoólogo, farmacólogo, autor, y burócrata del gobierno de la Dinastía Song (960-1279) . Es el autor de la primera gran enciclopedia científica de la historia China denominada “Meng Xi Bi Tan" o “Una colección de relatos” . Esta colección del año 1083 cubre una amplia gama de temas sobre matemáticas, astronomía, física, química, cartografía y medicina.

Shen Kuo fue el primero en describir la brújula magnética en su “Mengxi Bitan”, cien años antes de que Alexander Neckham la describiera en Europa. Descubrió el concepto astronómico del norte verdadero, y alegó, que el sol y la luna eran esféricos, no planos, empleando la observación del eclipse solar y el eclipse lunar. Por todos sus avances científicos y por su autoría de la enciclopedia “Meng Xi Bi Tan"   es considerado “El científico más grande del Asia”.

---

[42] Consultar el articulo “suma visual de cuadrados” en https://sferrerobravo.wordpress.com/2008/05/18/suma-visual-de-cuadrados/, 28 de mayo del 2008

[43] Tomado de https://es.wikipedia.org/wiki/Shen_Kuo

La fórmula que vamos a tratar acá es un caso particular de lo que hizo Shen Kuo con series finitas mediante el "amontonar pilas". En efecto, él da la siguiente fórmula en su libro "Meng Xi Bi Tan" [44] :

$$S = ab + (a+1) * (b+1) + (a+2) * (b+2) + (a+3) * (b+3) + \ldots + c*d$$

$$= \frac{n}{6} * [(2b + d)a + (2d+ b) c] + \frac{n}{6} * (c - a)$$

donde $c = a + (n - 1)$ y $d = b + (n - 1)$.

O lo mismo,

$$S = ab + (a+1) * (b+1) + (a+2) * (b+2) + (a+3) * (b+3) + \ldots + (a + n - 1) * (b + n - 1)$$

$$= \frac{n}{6} * [(3b + n - 1)a + (3b+ 2n - 2) (a + n - 1)] + \frac{n}{6} * (n - 1)$$

Haciendo $a = b = 0$, la fórmula se reduce a :

$$S = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n - 1)^2 = \frac{n}{6} * (2n - 2) (n - 1) + \frac{n}{6} * (n - 1)$$

$$= \frac{n}{6} * (n - 1) [(2(n - 1) + 1] = \frac{(n-1)*n*[(2(n-1)+1]}{6}$$

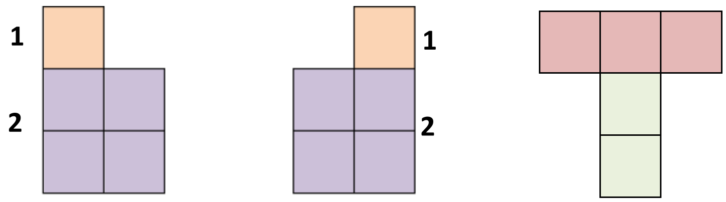
De acá, $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}$$

Precisamente el objetivo del presente proyecto es obtener esta última fórmula de modo geométrico_algebraíco.

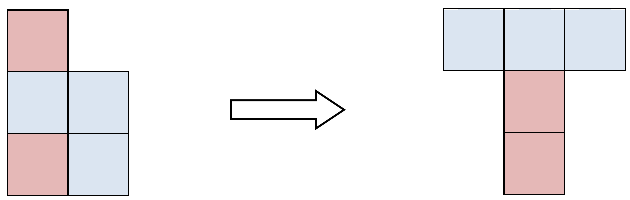
C. Motivación Geométrica para la suma de los cuadrados de los números naturales consecutivos a partir de 1. Inicialmente presentamos casos particulares de un proceso que permite al estudiante descubrir la fórmula. Esperamos que el estudiante solo viendo las figuras y sus colores pueda aceptar lo que debajo de ellas se va afirmando, y luego pueda él mismo llegar a obtener la fórmula deseada.

[44] La fórmula acá tratada aparece en la página 47 del el trabajo "Las matemáticas chinas" de Maria Nieves, Isabel Garcia y otros, y se encuentra en http://paginaspersonales.deusto.es/cruz.borges/Papers/04Historia.pdf

- n = 2



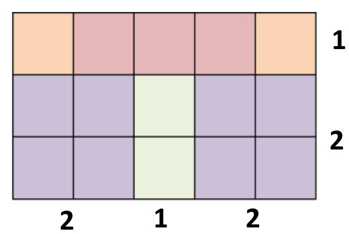
Las tres piezas de arriba tienen la misma área: $1^2 + 2^2$. Detallemos que las figuras de la izquierda y la derecha tienen la misma área [45]:
Olvidándonos por el momento de los colores observamos que la figura de la derecha se construye a partir de la primera transformando la escuadra de ésta en un rectángulo de alto 1 y colocando sus dos restantes cuadrados en columna, como se indica a continuación:



$\mathbf{1^2 + 2^2}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{1*3 + 2*1}$

Bien, al juntar estas tres piezas se arma un rectángulo de (1 + 2) de alto y 2∗2 + 1 de ancho. Tenemos así:

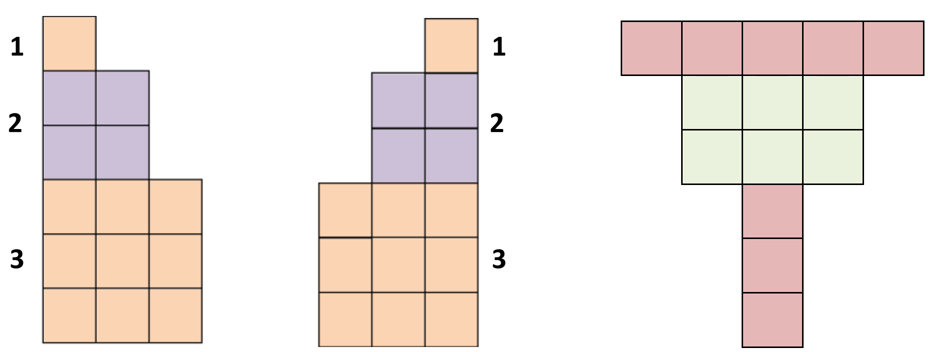
$$
\begin{aligned}
3(1^2 + 2^2) &= (1 + 2) * (2*2 + 1) \\
&= \frac{2 * (2+1)}{2} * (2*2 + 1) \\
&= \frac{2\,(2+1)\,(2*2+1)}{2}
\end{aligned}
$$



Luego,

$$\mathbf{1^2 + 2^2} = \frac{\mathbf{2\,(2+1)\,(2*2+1)}}{\mathbf{6}} \qquad \square$$

- n = 3

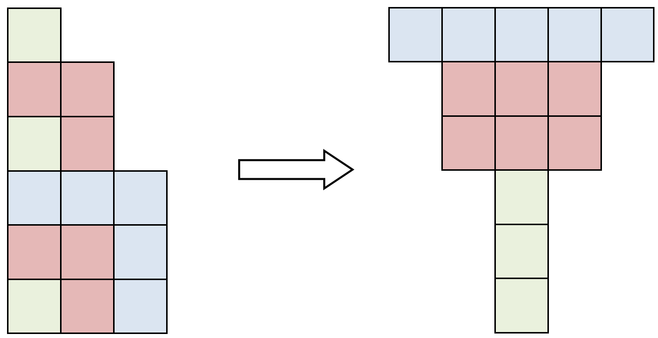


---

[45] Geométricamente se comprueba la relación: $\mathbf{1*3 + 2*1} = \mathbf{1^2 + 2^2}$.

Las tres piezas anteriores tienen la misma área: $1^2 + 2^2 + 3^2$. Detallemos que las figuras de la izquierda y la derecha tienen la misma área[46] :

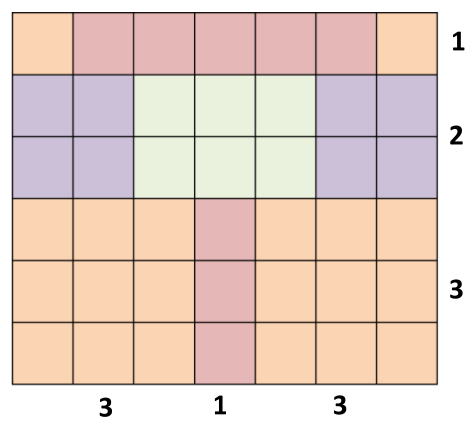
Olvidándonos por el momento de los colores observamos que la figura de la derecha se construye a partir de la primera transformando las escuadras de ésta en rectángulos de alto 1 y colocando sus tres restantes cuadrados en columna, como se indica a continuación:



$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{1*5 + 2*3 + 3*1}$

Bien, al juntar estas tres piezas se arma un rectángulo de (1 + 2 + 3) de alto y 2∗3 + 1 de ancho. Tenemos así:

$$
\begin{aligned}
3(1^2 + 2^2 + \mathbf{3^2}) &= (1 + 2 + \mathbf{3}) \ * \ (2*\mathbf{3} + 1)\\
&= \frac{\mathbf{3} * (\mathbf{3}+1)}{2} \ * \ (2*\mathbf{3} + 1)\\
&= \frac{\mathbf{3}\,(\mathbf{3}+1)\,(2*\mathbf{3}+1)}{2}
\end{aligned}
$$



Luego,

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{\mathbf{3\,(3+1)\,(2*3+1)}}{\mathbf{6}} \qquad \square$$

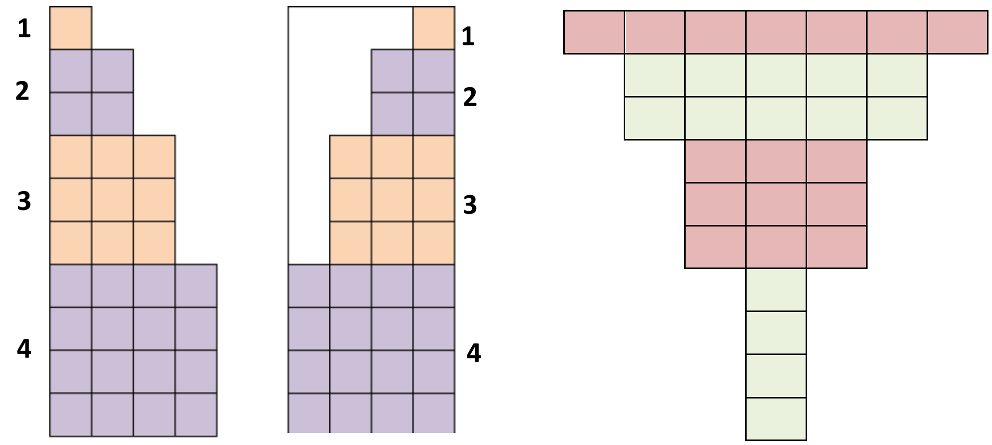
[46] Geométricamente se comprueba la relación: $\mathbf{1*5 + 2*3 + 3*1 = 1^2 + 2^2 + 3^2}$
Algo más, de la relación $\mathbf{1*3 + 2*1} = \mathbf{1^2 + 2^2}$ se tiene inductivamente que $\mathbf{1*5+ 2*3 + 3*1} = \mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2}$ **:**

$\mathbf{1*5 + 2*3 + 3*1} = 1*(3 + 2) + 2*(1 + 2) + 3*1 = (1*3 + 2*1) + 2*(1 + 2) + 3*1 =$

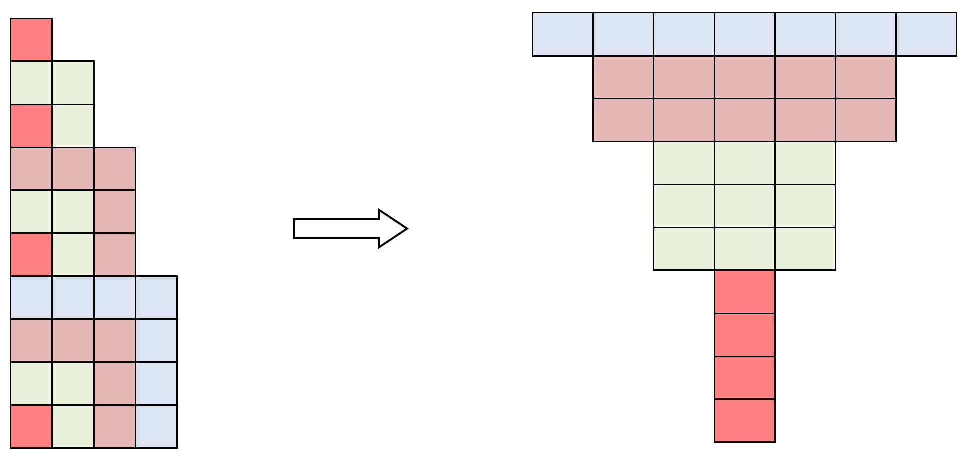
$(1^2 + 2^2) + 2\ \frac{2(3)}{2} + 3*1 = (1^2 + 2^2) + 3*2 + 3*1 = (1^2 + 2^2) + 3\,(1+2) = \mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2}.$

- n = 4

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$:



Las tres piezas de arriba tienen la misma área: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.



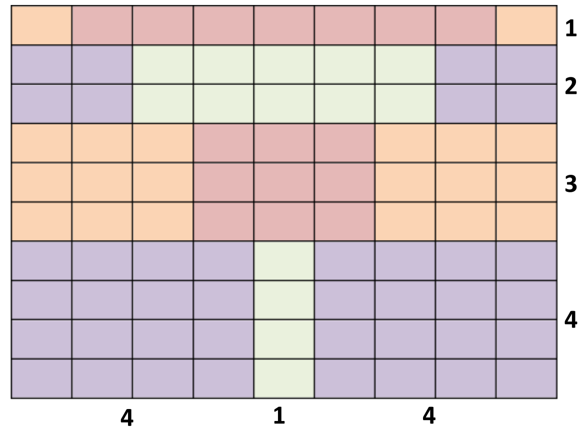
La figura anterior nos indica que: $\mathbf{1*7} + \mathbf{2*5} + \mathbf{3*3} + \mathbf{4*1} = \mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}$ [47].

---

[47]Algo más, de la relación **$1*5+ 2*3 + 3*1 = 1^2 + 2^2 + 3^2$** se tiene inductivamente que **$1*7+ 2*5 + 3*3 + 4*1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$:**

$\mathbf{1*7+ 2*5 + 3*3 + 4*1} = 1*(5 + 2) + 2*(3 + 2) + 3*(1 + 2) + 4*1 = (1*5 + 2*3 + 3*1) + 2*(1 + 2 + 3) + 4*1 = (1^2 + 2^2 + 3^2) + 2\,\frac{3(4)}{2} + 4*1 = (1^2 + 2^2 + 3^2) + 4*3 + 4*1 = (1^2 + 2^2 + 3^2) + 4\,(3+1) = \mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}$.

Bien, al juntar estas tres piezas se arma un rectángulo de (1 + 2 + 3 + 4) de alto y 2∗4 + 1 de ancho . Tenemos así:

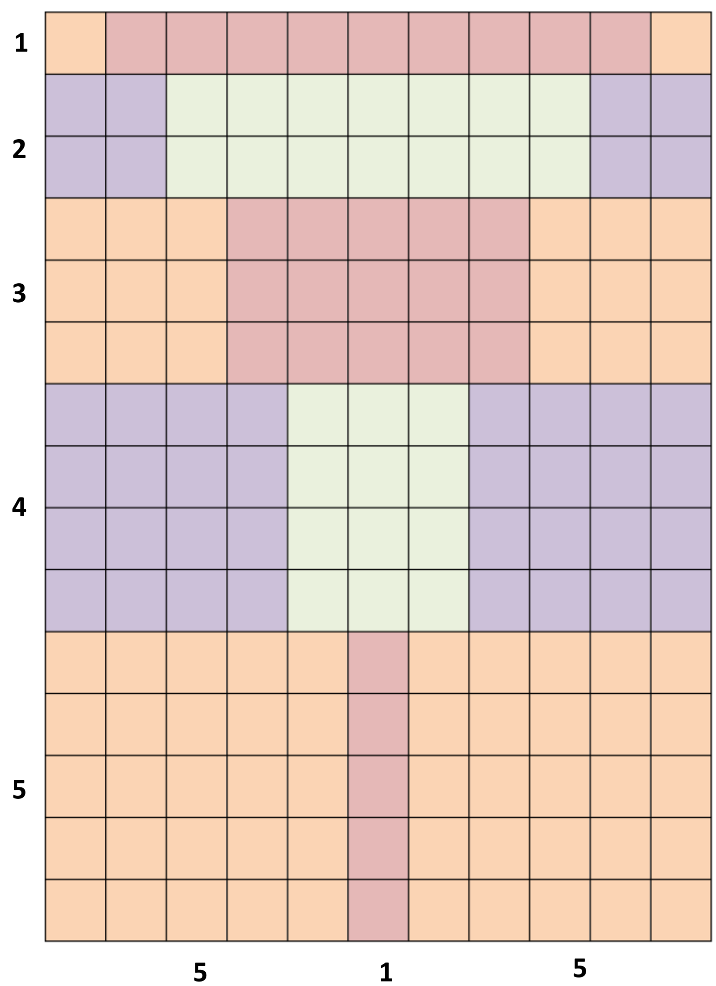


$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = (1 + 2 + 3 + 4) * (2*4 + 1)$$
$$= \frac{4 * (4+1)}{2} * (2*4 + 1)$$
$$= \frac{4\,(4+1)\,(2*4+1)}{2}$$

Luego,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4\,(4+1)\,(2*4+1)}{6} \square$$

- n = 5.



Por espacio y tiempo en este caso vamos a simplificar el proceso. El estudiante ya está en capacidad de comprender lo que acá expresaremos; Solo requiere buena observación y tener presente que $\mathbf{1*9 + 2*7 + 3*5 + 4*3 + 5*1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}$ [48] .

Dado que la parte central de la figura anterior tiene área $1*9 + 2*7 + 3*5 + 4*3 + 5*1$ ($= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$), se deduce que el rectángulo de alto $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$ y ancho $2*5 + 1$ en área es igual a 3 veces la suma de los cuadrados de lados 1, 2, 3, 4 y 5 . Luego:

$$\begin{aligned} 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5) * (2*5 + 1) \\ &= \frac{5*(5+1)}{2} * (2*5 + 1) \\ &= \frac{5\,(5+1)\,(2*5+1)}{2} \end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{5\,(5+1)\,(2*5+1)}{6} \quad \square$$

Sintetizando

- $\mathbf{1^2 + 2^2} = \frac{2\,(2+1)\,(2*2+1)}{6}$
- $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2} = \frac{3\,(3+1)\,(2*3+1)}{6}$
- $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \frac{4\,(4+1)\,(2*4+1)}{6}$
- $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{5\,(5+1)\,(2*5+1)}{6}$

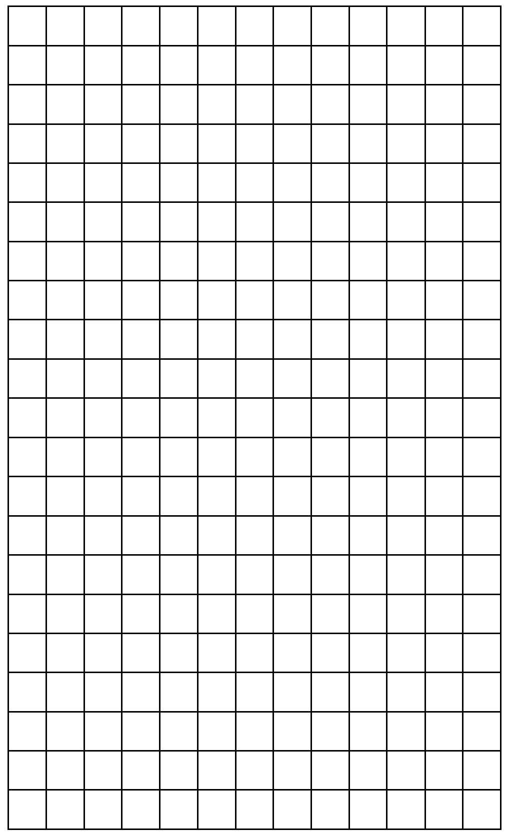
---

[48] De la relación $\mathbf{1*7+ 2*5 + 3*3 + 4*1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}$ se tiene inductivamente que $\mathbf{1*9+ 2*7 + 3*5 + 4*3 + 5*1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}$:

$\mathbf{1*9+ 2*7 + 3*5 + 4*3 + 5*1} = 1*(7 + 2) + 2*(5 + 2) + 3*(3 + 2) + 4*(1 + 2) + 5*1 = (1*7 + 2*5 + 3*3 + 4*1) + 2*(1 + 2 + 3 + 4) + 5*1 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 2\,\frac{4(5)}{2} + 5*1 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 5*4 + 5*1 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 5\,(4+1) = \mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}$.

Parte II: Actividades en clase **Tiempo estimado: 1 ½ horas**

1. a.



Usando el cuadro anterior para colorear adecuadamente junto con el proceso geométrico y aritmético antes tratado comprobar que:

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \frac{6\,(6+1)\,(2*6+1)}{6}}$$

2. Sin usar previamente la calculadora usted deberá hallar el miembro derecho de la fórmula correspondiente a la suma de los cuadrados allí dados

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Compruebe con calculadora la igualdad por usted encontrada

3. Generalizando el proceso:

a. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots + n^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

b. Usando las operaciones del caso compruebe que la suma en (a) da un polinomio de grado 3 en la variable n; Y precise los valores A, B y C tales que

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = An^3 + B\,n^2 + Cn}$$

4. Usando la fórmula obtenida en (3) calcular las siguientes sumas:

a. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$

b. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2$

5.

a. Pruebe inductivamente que

1. $\mathbf{1*11 + 2*9 + 3*7 + 4*5 + 5*3 + 6*1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}$

2. $\mathbf{1*13 + 2*11 + 3*9 + 4*7 + 5*5 + 6*3 + 7*1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2}$

b. Generalizando los casos anteriores. Usando los cuadrados de los números naturales complete:

$\mathbf{1*(2n-1) + 2*(2n-3) + 3*(2n-5) + 4*(2n-7) + \ldots + (n\text{-}1)*3 + n*1}$ = ________________

O lo mismo, usando sumatorias: $\sum_{k=1}^{n} k*[2n-(2k-1)]$ = ______________[49]

Parte III del proyecto. Actividades fuera de clase: **Suma de cuadrados de números naturales usando ecuaciones lineales.**

De las actividades de clase sabemos que las suma de los cuadrados de números naturales consecutivos es un polinomio de grado 3 en la variable n [50] :

---

[49] Una vez obtenida la igualdad deseada y aceptada como verdadera, el estudiante a partir de dicha igualdad y de las propiedades de sumatorias puede deducir la fórmula válida para la suma de cuadrados de números naturales consecutivos. Y para comenzar es necesario tener presente que

$$\sum_{k=1}^{n} k*[2n-(2k-1)] = \sum_{k=1}^{n} k*[(2n+1) - 2k]$$

[50] Existe otra forma de saber el grado del polinomio como es mediante las diferencias de distintos órdenes a partir de los términos de las sumas parciales de los cuadrados de naturales consecutivos:

	0	1	2	3	4	5	6	7
Cuadrados:	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**
Sumas parciales de cuadrados:	**0**	**1**	**5**	**14**	**30**	**55**	**91**	**140**
1ª : Diferencias de los de la fila anterior		**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**
2ª : Diferencias de los de la fila anterior			**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**
3ª : Diferencias de los de la fila anterior				**2**	**2**	**2**	**2**	**2**

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + n^2 = \mathbf{p(n)} = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Considerando n = 0, 1, 2, 3 se llega al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$A + B + C = 1$$

$$8A + 4B + 2C = 5$$

¿ por qué? (Justifíquelo usted , esto hace parte de la actividad)

Usando la calculadora virtual que aparece en https://matrixcalc.org/es/ se obtiene:

$$A = \frac{1}{3} \qquad B = \frac{1}{2} \qquad C = \frac{1}{6}$$

Luego,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ **¿por qué?** □

Como son **tres** niveles (indicados por las flechas pequeñas) que se deben transitar a partir de las sumas parciales hasta llegar a una diferencia constante (2) en la última fila, puede probarse aunque acá no lo hacemos que la forma general asociado a los términos de la fila inicial (sumas parciales de cuadrados) es un polinomio de grado **3** en la variable n.

Conclusiones y recomendaciones

Cabe aclarar que todos proyectos de aula fueron aplicados a 27 estudiantes de la Universidad Tecnológica de Pereira en las asignaturas: Historia y epistemología de las Matemáticas, Matemáticas Recreativas y Enseñanza de las matemáticas implementadas en el segundo semestre de 2016 y primer semestre del 2017 (Todo lo anterior se encuentra especificado en el capítulo 1 del presente documento). De otra parte, los proyectos de aula tres, cuatro y cinco fueron analizados y desarrollados por dos docentes del área de matemáticas de los colegios Rodolfo Llinás y Liceo Campestre.

- Gracias al apoyo de referentes como el de Carillo se logró tener un diseño adecuado para la construcción de cada proyecto de aula; además con el escrito de Puig se llevaron a cabo pautas al momento de la realización de problemas ya que destaca el recorrido histórico en la solución de los mismos.

- El análisis del documento de Martínez Padrón permitió conocer algunas de las actitudes que los estudiantes tienen frente a las matemáticas actualmente lo cual ayudo a buscar alternativas para abordar temas tan importantes como la historia logrando una actitud diferente que se evidencia con las conclusiones emitidas por los estudiantes al momento de la realización de los proyectos.

Proyecto 1

- Se consideró que el proyecto es pertinente ya que impulsó a los estudiantes a "pensar" de una forma diferente (ver diversas alternativas al momento de desarrollar algún problema matemático, tal como lo expresaron). Esto se evidencia teniendo en cuenta que ya se conocía la población a la que se aplicó el presente proyecto y, por esta razón, se conocía su actitud frente a las matemáticas.
- Para la aplicación en bachillerato (grado séptimo) se deben tener en cuenta otros aspectos: conocer el número mágico y luego de las prácticas incrementar el nivel de dificultad en los cuadrados mágicos suprimiéndoles la cantidad de números inicialmente conocidos. Esto se sugiere debido a que su nivel académico, en la mayoría de los casos, no tiene presentes los conceptos necesarios para desarrollar este tipo de problemas.
- Los estudiantes utilizaron 2 horas para la realización del proyecto e indicaron que era necesario más tiempo. Esto se tiene en cuenta debido a que la presente guía se desarrolló por estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas y Física de la

Universidad Tecnológica de Pereira y se plantea para estudiantes de bachillerato (grado séptimo).

- Se señaló que, inicialmente, el trabajo debería ser colaborativo para que las ideas de los compañeros contribuyeran a la solución de la actividad logrando así un aprendizaje constructivo. Cabe resaltar que cada una de las guía fue diseñada para ser desarrollada de forma individual.
- Debido a la necesidad de encontrar la sumatoria correcta, los estudiantes intentaron hallar una demostración de los cuales, dos estudiantes lograron llegar a demostrarlo correctamente por separado y sin ninguna indicación. Cabe destacar que el grupo era conformado por 13 estudiantes.

Proyecto 2

- Los estudiantes reconocieron la dificultad de los procesos elaborados en las matemáticas chinas y observaron la evolución que se han tenido en dichos procesos dándole su valor lo cual impulsó a cambiar su actitud frente a las matemáticas ligando los procesos matemáticos con su historia.
- Fue evidente el asombro y la cautivación que reflejaron los estudiantes al conocer los procesos llevados por la cultura China y los hallazgos que esta cultura obtuvo en paralelo con los demás hallazgos lo que genera una buena disposición frente al tema.
- Los estudiantes indicaron: "debido a que no nos encontramos acostumbrados al método, se nos hace complejo y un poco extraño por lo extenso y dispendioso de los cálculos, pero el método en general es muy útil y efectivo. Además, por la antigüedad del mismo, podemos formarnos una idea del avance de esta cultura en el área de las matemáticas". Esto indica que este proyecto influenció positivamente su forma de pensar al darle valor a la historia que rodea el contenido matemático.
- El presente proyecto permitió comparar los hallazgos obtenidos por los chinos con el método Gauss encontrando semejanzas significativas permitiéndoles conocer un poco del recorrido realizado por las matemáticas para contar con los procesos que tenemos hoy en día.

Proyecto 3

- Basados en la experiencia como docentes se puede decir que el proyecto es óptimo e idóneo ya que al aplicar esta demostración del teorema de Pitágoras se concluye que hay una mayor aprehensión por parte del estudiante gracias al uso de la demostración grafica a partir de figuras geométricas.
- Se ha podido observar que al realizar procesos acompañados de una buena base histórica se logra una mayor concentración y dinamismo en el estudiante,

haciéndole ver todos los avances que se han llevado a cabo para llegar a los resultados que se tienen hoy en día.

- El presente proyecto de aula es apropiado para aplicar a partir de grado séptimo ya que su contexto tiene base en la geometría y en la historia permitiendo una fácil asimilación de una demostración práctica dando las bases necesarias para realizar demostraciones analíticas posteriores**.**

Proyectos 4 y 5

- La aplicación de los círculos mágicos en el aula de clases permite una mayor concentración de los estudiantes en el desarrollo de procedimientos matemáticos.
- Se considera apropiado para aplicar en grado noveno ya que una posible solución a estos círculos se da a partir de ecuaciones algebraicas y es allí donde se logra tener un buen maneo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones
- Con la realización de los círculos mágicos se logra una mayor agilidad a la hora de desarrollar operaciones básicas al igual que el dinamismo en los mismos.

Proyectos 6 y 7

- Los estudiantes de modo inductivo logran descubrir fórmulas interesantes y necesarias para la posterior comprensión de la integral y la derivada.

- La geometría y las figuras geométricas "apilonadas" se constituyen en fundamento de las fórmulas inductivas más sencillas de ordenes 1 y 2.

- Se adquieren una visión distinta de la formal propia de las matemáticas, como es la de considerar esta ciencia como parte de una ciencia cognitiva y heurística.

Bibliografía

- Algarra, M., Borges, C., García, I., Hernández V.,y Hernández B., (2004). Las Matemáticas Chinas, Universidad de Deusto, España.

- Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2007). Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura, Mérida.

- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Universidad de Granada, España.

- Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, España.

- Godino, J(*), Batanero, C(*) y Font, V(**). (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. (*) Universidad de Granada; (**) Universidad de Barcelona, España

- Godino, J(*),Font, V(**),Wilhelmi, M (***), y Castro, C(****). (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. (*)Universidad de Granada; (**) Universidad de Barcelona, (***) Universidad Pública de Navarra,(****) Universidad Complutense de Madrid, España.

- Gomez, O,. (2013). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. Revista Científica, Edición Especial, Bogotá, D.C., Colombia.

- Hernández, I,. (2012). Ruta Maestra, Ed 7, Santillana, Bogotá, D.C., Colombia

- Martinez, O., (2007). Discusión Pedagógica, actitudes hacia la matemática. Instituto Pedagógico Rural, El Mácaro, Turmero, Venezuela.

- Ministerio de Educación Nacional, (2006).Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, MEN, Colombia.

- Prats, J,.(2001). Enseñar Historia: Notas para una didáctica renovadora. Junta de Extremadura, Mérida.

- Prats, J..(2007).La Historia es cada vez más necesaria para formar personas con criterio. Universidad de Barcelona

- Puig, L,. (2006)La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, España.

- Rivera, E,. y SÁNCHEZ, L,. (2012). Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.